

VAF. Variables aléatoires finies

QCOP VAF.1

	$X[\Omega]$	$\mathbb{P}(X = k), k \in X[\Omega]$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}[X]$
$X \sim \mathcal{U}([a, b])$	$[a, b]$	$\frac{1}{\text{Card}([a, b])}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(\text{Card}([a, b]))^2 - 1}{12}$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} 1-p & \text{si } k=0 \\ p & \text{si } k=1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$
$X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$[0, n]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Remarque : $\text{Card}([a, b]) = b - a + 1$ (il s'agit du nombre d'entiers entre les entiers a et b).

QCOP VAF.2

1. Résultat. $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X[\Omega]} x \mathbb{P}(X = x).$

La définition $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$ est correcte mais n'est pas utile en pratique : il faut l'oublier et avoir le réflexe d'utiliser la précédente.

2. a) Résultat. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in X[\Omega]} f(x) \mathbb{P}(X = x).$

b) Résultat. $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in X[\Omega]} x^2 \mathbb{P}(X = x).$

3. a) Écrire $(X \geq k) = (X = k) \cup (X \geq k+1)$ où l'union considérée est disjointe.

b) Utiliser la formule $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X = k)$ et remplacer $\mathbb{P}(X = k)$ par ce qui précède.

QCOP VAF.3

1. Résultat. $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$

2. Développer l'égalité précédente et utiliser la linéarité de l'espérance, en comprenant que $\mathbb{E}[X]$ devient un scalaire.

Il s'agit de la formule dite de König-Huygens.

3. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2]$ et utiliser la formule précédente.

Résultat. $\mathbb{V}[X] = 0.$

QCOP VAF.4

1. **Résultat.** $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

2. Puisque $\mathbb{V}[\lambda X + Y] = \text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$, par bilinéarité de la covariance,

$$\mathbb{V}[\lambda X + Y] = \lambda^2 \mathbb{V}[X] + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}[Y].$$

La fonction $\lambda \mapsto \mathbb{V}[\lambda X + Y]$ est polynomiale de degré 2. Étant toujours positive, son discriminant est négatif ou nul.

3. Majorer les variances de X et Y à l'aide de l'inégalité (à connaître et savoir démontrer) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad x(1-x) \leq \frac{1}{4},$$

puis appliquer la question précédente.

QCOP VAF.5

1. **Résultat.** Les variables X et Y sont dites corrélées lorsque $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ et décorrélées lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

2. Partir de la définition de la covariance : $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

Résultat. $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Pour retenir la formule, l'appliquer avec $Y = X$ et retrouver la formule de König-Huygens pour la variance.

3. **Résultat.** $\text{Cov}(X, Y) = 0 \iff X$ et Y sont indépendantes.

4. On peut considérer un jeu où on lance deux dés à 6 faces, où l'on note X le résultat du premier dé et Y le résultat du deuxième. On note $S := X + Y$ la somme des chiffres obtenus et $D := X - Y$ leur différence. On peut vérifier que (exercice) $\text{Cov}(S, D) = 0$ mais S et D ne sont pas indépendantes car :

$$\mathbb{P}(S = 2, D = 5) = 0 \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}(S = 2) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(D = 5) \neq 0.$$

QCOP VAF.6

1. **Résultat.** On suppose X à valeurs positives. Alors, pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

2. a) Il faut justifier que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) \geq a \iff e^{tX(\omega)} \geq e^{ta}.$$

b) Appliquer l'inégalité de Markov pour majorer $\mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta})$, puis conclure à l'aide la question précédente.

QCOP VAF.7

1. **Résultat.** $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$.

2. a) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire X et $\varepsilon = \alpha\sigma$.

b) Remarquer que $\mathbb{P}(|X - \mu| < \alpha\sigma) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \alpha\sigma)$ et

$$|X - \mu| < \alpha\sigma \iff \mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma.$$