

Trigonométrie et nombres complexes

Une transformation

QCOP TRGCPLX.1



1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\begin{aligned}\Re(zz') &= \Re(z)\Re(z') - \Im(z)\Im(z') \\ \Im(zz') &= \Re(z)\Im(z') + \Im(z)\Re(z').\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer :

$$\Re\left((1-i)(\cos(x) + i\sin(x))\right).$$

b) En déduire que :

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Factorisation par l'angle moitié

QCOP TRGCPLX.2



1. Définir l'ensemble $\mathbb{U}$ et en donner une description.

2. Montrer les formules d'Euler exprimant $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Factoriser

$$\begin{aligned}1 + e^{i\theta}, & \quad 1 - e^{i\theta}, \\ e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}, & \quad e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}.\end{aligned}$$

QCOP TRGCPLX.3



1. Définir, pour $\theta \in \mathbb{R}$, le nombre $e^{i\theta}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta} \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Factoriser $1 - e^{i\theta}$ et $1 - e^{i(n+1)\theta}$.

b) Calculer la somme $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.

3. En déduire, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

Délinéarisation

QCOP TRGCPLX.4 ★



1. Énoncer et démontrer la formule de Moivre.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin^{2p}(\theta) \cos^{n-2p}(\theta) \\ \sin(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} \sin^{2p+1}(\theta) \cos^{n-1-2p}(\theta). \end{cases}$$

b) Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

On n'appliquera pas directement les formules précédentes mais on s'inspirera de la méthode de leur démonstration.