

TALG. Techniques algébriques

QCOP TALG.1

1. Résultat. $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$

2. Résultat. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$

QCOP TALG.2

3. a) Résultat. $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$

Il s'agit de la somme des coefficients binomiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

b) Résultat. $\text{Card}(\mathcal{P}(E \times F)) = 2^{\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)}$ car $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$

Remarquons que, en général, $\text{Card}(\mathcal{P}(E \times F)) \neq \text{Card}(\mathcal{P}(E)) \times \text{Card}(\mathcal{P}(F)).$

QCOP TALG.3

3. On utilise la formule $\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!},$ i.e. on simplifie $(n-k)!$ avant de débiter le calcul.

QCOP TALG.4

2. Résultat. $S_p(n) = \binom{p+n+1}{p+1}.$

Cet exercice est fait dans le Cahier de calcul en Terminale, fiche Term-DENO-01.

QCOP TALG.5

- Résultat. $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + nr$.
- Résultat. $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{a + u_n}{2}$ et $\sum_{k=N_0}^{N_1} u_k = (N_1 - N_0 + 1) \frac{a + u_{N_1}}{2}$.
- Résultat. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

QCOP TALG.6

- Résultat. $\sum_{k=N_0}^{N_1} a^k = \sum_{k=m}^n a^k = \frac{a^{N_0} - a^{N_1+1}}{1-a} = a^{N_0} \frac{1 - a^{N_1-N_0+1}}{1-a}$.
- Résultat.

	$a \in [0, 1[$	$a = 1$	$a > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a^k$	$\frac{1}{1-a}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a^k$	$\frac{a}{1-a}$	$+\infty$	$+\infty$

QCOP TALG.7

- Résultat. $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

On pourra procéder par télescopage.

- Remarquer que $P(x) = P(x) - \underbrace{P(c)}_{=0}$ et utiliser la formule précédente.

Exercice : écrire et démontrer un résultat analogue pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque (ici, c'est le cas $n = 3$).