

SER. Séries numériques

QCOP SER.1

3. ♦ On a $\arctan(12n!) \rightarrow \frac{\pi}{2} \neq 0$.

♦ On a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ mais

$$\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(N+1) \rightarrow +\infty.$$

Résultat. Les deux séries divergent.

QCOP SER.2

1. Résultat. La suite $(U_N)_N$ est croissante.

2. Utiliser le théorème de la limite monotone.

3. On peut utiliser $u_n := -\frac{1}{n}$.

QCOP SER.3

1. Résultat. $a^n \rightarrow 0 \iff |a| < 1$.

2. Résultat. $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

3. Calculer la limite de $\sum_{k=0}^n a^k$, en traitant séparément la cas $a = 1$.

4. Résultat. $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \frac{a}{1 - a}$.

QCOP SER.4

2. Il s'agit de voir que $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n)$.

En posant $v_n := u_{n+1} - u_n$, on peut utiliser ce qui précède avec la suite $(v_n)_n$.

QCOP SER.6

4. On peut utiliser $u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

QCOP SER.7

- Utiliser la définition de $\mathcal{O}(\cdot)$ version « à partir d'un certain rang ».
- Utiliser ce qui précède. Le résultat de cette question doit être un réflexe : si $|u_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $\sum_n |u_n|$ converge.

QCOP SER.8

- Utiliser la définition de $\mathcal{O}(\cdot)$ version « à partir d'un certain rang ».
- Utiliser ce qui précède.

QCOP SER.9

- Utiliser la décroissance de f sur les segment $[k, k+1]$ de façon à encadrer $\int_k^{k+1} f(t) dt$ par deux valeurs de f . On peut ensuite sommer ces inégalités de façon à faire apparaître $\sum_{k=n}^m f(k)$.
- La formule précédent nous permet de minorer H_n par une quantité de l'ordre de $\ln(n)$. Puisque $\ln(n) \rightarrow +\infty$, on obtient la divergence par minoration.
 - Montrer, toujours à l'aide de l'inégalité précédente, que $\frac{H_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$.

QCOP SER.10

- Utiliser la contraposée de « $\sum_n u_n$ converge $\implies u_n \rightarrow 0$ ».

QCOP SER.11

- On peut utiliser $u_n := \frac{(-1)^n}{n}$.

QCOP SER.12

- Montrer que $(S_{2N})_N$ est décroissante, $(S_{2N+1})_N$ est croissante et $S_{2N+1} - S_{2N} \rightarrow 0$.
 - Résultat.
$$\begin{cases} \sum_n (-1)^n a_n \text{ converge} \\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad S_{2N+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \leq S_{2N}. \end{cases}$$
 - Utiliser l'encadrement précédent en $N = 0$.
- Appliquer ce qui précède à la série $\sum_{k \geq n+1} (-1)^k a_k$.

QCOP SER.13

1. a) Utiliser la définition de la limite en prenant $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ (cette quantité étant donnée par le fait que $\ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}$ est le milieu de $] \ell, 1[$). On peut donc prendre $\ell' = \frac{\varepsilon+1}{2}$.

b) Par récurrence, on peut montrer que :

$$\forall n \geq N_0, \quad |u_n| \leq (\ell')^{n-N_0} |u_{N_0}|,$$

puis conclure par comparaison pour les séries à termes positifs.

2. On arrive à montrer que :

$$\exists \ell' \in]1, \ell[: \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N_0, \quad |u_{n+1}| \geq \ell' |u_n|.$$

On peut par exemple prendre $\ell' = \frac{1+\ell}{2}$ (milieu de $]1, \ell[$).

3. On peut prendre $u_n = \frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$.