

Séries numériques

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Premiers résultats

QCOP SER.1



Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. Donner la définition de « la série $\sum_n u_n$ est convergente ».
2. Montrer que :

$$\sum_n u_n \text{ converge} \implies u_n \longrightarrow 0.$$
3. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \arctan(12n!) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

QCOP SER.2



Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels positifs.

On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $U_N := \sum_{n=0}^N u_n$.

1. Quelle est la monotonie de $(U_N)_N$?
2. Montrer que :

$$\sum_n u_n \text{ converge} \iff (U_N)_N \text{ est majorée.}$$
3. Ceci reste-il vrai si l'on ne suppose plus que $(u_n)_n$ est à valeurs positives ?

Deux séries de référence

QCOP SER.3



Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. Compléter :

$$a^n \longrightarrow 0 \iff \dots$$
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de $\sum_{k=0}^N a^k$ pour $a \neq 1$.
3. Montrer que :

$$\sum_n a^n \text{ converge} \iff |a| < 1.$$
4. On suppose que $|a| < 1$. Déterminer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^n.$$

QCOP SER.4



Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k).$$

 b) En déduire que $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge si, et seulement si, $(u_n)_n$ converge.
2. On suppose que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$.
 Montrer que la série

$$\sum_n (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$$
 converge.

Théorèmes de comparaison

QCOP SER.5



Soit $N_0 \in \mathbb{N}$. Soient $(a_n)_{n \geq N_0}, (b_n)_{n \geq N_0}$ deux suites de nombres réels positifs.

On pose, pour $N \geq N_0$,

$$A_N := \sum_{n=N_0}^N a_n \text{ et } B_N := \sum_{n=N_0}^N b_n.$$

1. Compléter :

$$\sum_{n \geq N_0} a_n \text{ converge} \iff (A_N)_{N \geq N_0} \dots$$

2. On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists N_1 \geq N_0 : \forall n \geq N_1, a_n \leq b_n \\ \sum_{n \geq N_0} b_n \text{ converge.} \end{array} \right.$$

a) Montrer que $(A_N)_{N \geq N_0}$ est majorée.

b) En déduire que $\sum_{n \geq N_0} a_n$ converge.

c) Montrer que $\sum_{n=N_1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=N_1}^{+\infty} b_n$.

QCOP SER.6



Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs telles que

$$a_n \sim b_n.$$

1. Rappeler la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1, \frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n.$$

3. Montrer que $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont de même nature.

4. Ce résultat reste-il valable si l'on ne suppose plus $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ à valeurs positives ?

QCOP SER.7



1. Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \sum_n |v_n| \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$

3. Soit $\sum_n u_n$ une série numérique.

Montrer que :

$$n^2 u_n \longrightarrow 0 \implies \sum_n u_n \text{ converge.}$$

QCOP SER.8



1. Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = \mathcal{O}(v_n) \\ \sum_n |v_n| \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$

3. Soit $\sum_n u_n$ une série numérique telle que $(n^2 u_n)_n$ est bornée.

Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

Comparaison série-intégrale

QCOP SER.9



1. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \geq n$. Montrer que :

$$\int_n^m f(t) dt + f(m) \leq \sum_{k=n}^m f(k) \leq f(n) + \int_n^m f(t) dt.$$

2. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

b) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.

QCOP SER.10



Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $\alpha \leq 0$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

2. On suppose que $\alpha > 0$.

a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$I_N + \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + I_N, \quad \text{où } I_N := \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

On n'utilisera pas une « formule toute faite » de comparaison série-intégrale mais on l'établira dans ce cas particulier.

b) En déduire la nature de $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ en distinguant les cas $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

Convergence absolue

QCOP SER.11



Soit $\sum_n u_n$ une série numérique.

1. Définir « $\sum_n u_n$ est absolument convergente ».

2. Montrer que, si $\sum_n u_n$ est absolument convergente, alors $\sum_n u_n$ est convergente.

On fera d'abord la preuve dans le cas où $(u_n)_n$ est à valeurs réelles.

3. Montrer que la réciproque est fausse en général.

4. Écrire la contraposée du résultat démontré.

Séries alternées

QCOP SER.12 ★



Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs, décroissante et de limite nulle.

On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N := \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n$.

1. a) Montrer que $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ sont adjacentes.
b) Compléter :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_n (-1)^n a_n \dots \\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \dots \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \leq \dots \end{array} \right.$$

- c) En déduire que $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_0$.

2. On suppose que $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

Au programme de spé : la règle de D'Alembert

QCOP SER.13 ★



Soit $\sum_n u_n$ une série réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell.$$

1. On se place dans le cas où $0 \leq \ell < 1$.

- a) Justifier que :

$$\exists \ell' \in]\ell, 1[: \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N_0, \quad |u_{n+1}| \leq \ell' |u_n|.$$

- b) En déduire que $\sum_n u_n$ converge.

2. De manière analogue, montrer que, dans le cas où $\ell > 1$, la série $\sum_n u_n$ diverge.

3. Que dire lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$?