

Probabilités

QCOP PROB.1



Soient A et B deux événements.

1. Définir l'indépendance de A et B .
2. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, que vaut $\mathbb{P}_B(A)$?
3. On suppose A et B indépendants.

Montrer que :

- a) $\bar{A}$ et B sont indépendants ;
- b) $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

QCOP PROB.2



1. Définir l'indépendance mutuelle d'une famille d'événements.
2. Montrer que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
3. À l'aide d'un contre exemple, vérifier que l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

QCOP PROB.3



Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, \dots, A_p)$ un système complet d'événements, dont aucun n'est négligeable.

1. Définir « $(A_1, \dots, A_p)$ un système complet d'événements ».
2. Soit B un événement.
 - a) Montrer que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_p)$.
 - b) Comment appelle-t-on usuellement cette formule ?
 - c) Écrire $\mathbb{P}(B)$ à l'aide de $\mathbb{P}(A_1), \dots, \mathbb{P}(A_p)$ et de probabilités conditionnelles.
3. Soit $(B_n)_n$ une suite d'événements non négligeables.
Écrire, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(B_n)$ et de probabilités conditionnelles.

QCOP PROB.4



Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Définir la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
Montrer que :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{k=1}^p \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(B)}.$$