

Polynômes

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Coefficients d'un polynôme

QCOP POL.1



1. Comment établir la nullité d'un polynôme ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire le polynôme $X^n - 1$ sous forme scindée.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^n (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

QCOP POL.2



1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Donner, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression du coefficient de degré k du produit PQ .
2. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.
 - a) Donner une expression du coefficient de degré p de $(X + 1)^{n+m}$.
 - b) En donner une autre en développant $(X + 1)^n \times (X + 1)^m$.
 - c) Calculer $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Racines d'un polynôme

QCOP POL.3



Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \left[\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)Q \right].$$

2. On suppose que $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et que α est racine de P .
 - a) Montrer que $\bar{\alpha}$ est racine de P .
 - b) Montrer que $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) \in \mathbb{R}[X]$.
 - c) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})Q$.

QCOP POL.4

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter :

$$P^n - Q^n = \dots \sum_{k=1}^{n-1} \dots$$

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer, à l'aide de la formule précédente, que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \left[\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)Q \right].$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^n \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

QCOP POL.5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

1. Justifier que P admet une racine complexe. Comment s'appelle le résultat utilisé ?
2. Le polynôme P possède-t-il nécessairement une racine réelle ?
3. On suppose que le degré de P est impair.
 - a) Justifier que les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont opposées.
 - b) En déduire que P possède une racine réelle.

Relations coefficients-racines**QCOP POL.6**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 3, dont on note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ ses racines complexes.

1. Énoncer et démontrer les relations coefficients racines pour P .
2. On prend $P = X^3 + X + 1$. Calculer :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}.$$

QCOP POL.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n .

1. Énoncer les relations coefficients racines pour P .
2. Les écrire explicitement pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
3. On suppose que $n = 2$ et $P(1) = 0$. Le polynôme P admet-il une autre racine réelle ? Si oui, l'exprimer en fonction des coefficients de P .