

MATAL. Matrices et applications linéaires

QCOP MATAL.1

3. On peut prendre $A = I_n$ et B une matrice de rang n qui ne soit pas l'identité (d'après la question précédente).

QCOP MATAL.2

1. Résultat. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = PBP^{-1}$.
2. Raisonner par récurrence sur la relation « $A = PBP^{-1}$ » pour montrer que $A^k = PB^kP^{-1}$.
3. De même, montrer que $Q(A) = PQ(B)P^{-1}$.

QCOP MATAL.3

1. Résultat. Les matrices A^k et B^k sont semblables.
2. Les matrices A^{k_A} et B^{k_A} sont semblables. Or, une matrice semblable à la matrice nulle est nulle (à comprendre). Comme B est diagonale, B^{k_A} est la matrice diagonale contenant les coefficients de B à la puissance k_A .
3. a) En écrivant la relation « $\lambda AX + \mu X = 0_{n,1}$ », et en multipliant par A , on montre que $\mu = 0$. Ensuite, $\lambda = 0$. On utilise bien que $X \notin \text{Ker}(A)$, donc $X \neq 0_{2,1}$ et $AX \neq 0_{2,1}$.
b) Par un argument de dimension, la famille (AX, X) est une base de $M_{2,1}(\mathbb{K})$.
On peut donc écrire la matrice de A dans la base (AX, X) .

Cette question est importante pour la deuxième année : on a montré que toute matrice nilpotente est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cela permet de trigonaliser les matrices 2×2 .

QCOP MATAL.4

On note $C_1, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A .

1. Résultat. $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.
2. a) Comme $\text{rg}(A) = 1$, par définition, il existe une colonne $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $C_1 = \alpha_1 C, \dots, C_n = \alpha_n C$. On pose ensuite $L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$.
b) Il faut montrer que $LC = \text{Tr}(A)$. On peut écrire les coefficients de C explicitement pour le comprendre.
c) Raisonner par récurrence sur la question précédente. Distinguer les cas $p = 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

QCOP MATAL.5

1. ♦ Montrer que $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{0_E\}$ et $\text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Im}(p)$.
♦ Conclure à l'aide d'arguments de dimension, notamment le théorème du rang.
2. Considérer une base de E adaptée à la somme directe $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.
3. ♦ En notant $\mathcal{B}$ la base précédemment déterminée et $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, on a $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(M)$.
♦ Il apparaît ensuite que $\text{Tr}(M) = \dim(\text{Ker}(p - \text{Id}_E))$.
♦ On montre enfin, en utilisant la formule du rang, que $\dim(\text{Ker}(p - \text{Id}_E)) = \dim(\text{Im}(\varphi))$.

QCOP MATAL.6

2. ♦ *Méthode matricielle.* Faire des opérations élémentaires sur A pour faire apparaître J_r .
♦ *Méthode géométrique.* Soit u l'application linéaire canoniquement associée. Soit $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\text{Ker}(u)$. Construire une base $B := (e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$ (théorème de la base incomplète) et justifier que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est de rang r . On peut donc construire une base C de $\mathbb{K}^n$ contenant $u(e_1), \dots, u(e_r)$ et $\text{Mat}_{B,C}(u) = J_r$. On conclut par la formule de changement de base.
3. Transposer la relation donnée par l'équivalence entre A et J_r .
4. Utiliser la transitivité de l'équivalence matricielle (qui est une relation d'équivalence).

QCOP MATAL.7

1. a) Utiliser la relation « $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$ ».

$$2. \text{ a) } \underline{\text{Résultat.}} \text{Mat}_{(1, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^n)}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & 3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ (0) & & & & 0 & n \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K}).$$

$$\text{b) } \underline{\text{Résultat.}} \text{Tr}(D) = 0.$$

QCOP MATAL.8

2. a) Résultat. $\text{Mat}_{(1, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^n)}(\varphi) = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$.
b) Résultat. $\varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{K}_n[\mathbf{X}] & \longrightarrow \mathbb{K}_n[\mathbf{X}] \\ P & \longmapsto P(\mathbf{X} - 1) \end{cases}$.
c) Résultat. $M^{-1} = \left((-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$.