

Matrices et applications linéaires

Similitude matricielle, rang d'une matrice

QCOP MATAL.1



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. Donner la définition de « A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ ».
2. Montrer que :

$$B = I_n \iff A = I_n.$$
3. Montrer que deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables.

QCOP MATAL.2



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. Donner la définition de « A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ ».
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que A^k et B^k sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$.
Pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$Q(M) := \sum_{j=0}^k a_j M^j.$$

Montrer que les matrices $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

QCOP MATAL.3 ★



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que dire de A^k et B^k ?
2. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} \exists k_A \in \mathbb{N}^* : A^{k_A} = 0_n \\ B \text{ est diagonale} \end{array} \right\} \implies B = 0_n.$$
3. On se place dans le cas $n = 2$. On suppose que $A \neq 0_2$ et $A^2 = 0_2$.
 - a) Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{K}) \setminus \text{Ker}(A)$.
Montrer que la famille (AX, X) est libre dans $M_{2,1}(\mathbb{K})$.
 - b) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

QCOP MATAL.4



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Définir le rang de A .
2. On suppose que $\text{rg}(A) = 1$.
 - a) Montrer qu'il existe $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ tels que $A = CL$.
 - b) Montrer que $A^2 = \text{Tr}(A)A$.
 - c) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, A^p .

Représentation matricielle

QCOP MATAL.5



Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit p un projecteur de E .

1. Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de p est diagonale.
3. Montrer que $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

QCOP MATAL.6 ★



Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in \llbracket 1, \min(n, p) \rrbracket$.
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r .

1. Définir la matrice usuellement appelée J_r et écrire la définition de « A et J_r sont équivalentes ».
2. Montrer que A et J_r sont équivalentes.
3. Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$.
4. Montrer que deux matrices de même rang sont équivalentes.

QCOP MATAL.7



1. **a)** Montrer que deux matrices semblables ont même trace.
b) Comment définir la trace d'un endomorphisme ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'endomorphisme :

$$D : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$$

- a)** Écrire la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- b)** Déterminer la trace de D .

QCOP MATAL.8 ★



1. Définir la notion de matrice d'une application linéaire.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a)** Écrire la matrice de l'endomorphisme :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{cases}$$

dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

- b)** Déterminer l'inverse de φ .
- c)** En déduire l'inverse de la matrice :

$$M := \left(\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$