

Logique, raisonnements

QCOP LGQ.1



1. Expliquer le principe du raisonnement par contraposée.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair}].$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

QCOP LGQ.2



1. Expliquer le principe du raisonnement par l'absurde.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. a) Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \quad [a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0].$$

- b) Montrer que :

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}, \quad [a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2} \implies \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}].$$

QCOP LGQ.3



1. Soit $D \subset \mathbb{R}$. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
Donner la définition de « la fonction f est strictement croissante sur le domaine D ».
2. Montrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
3. On admet que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

Comparer les nombres :

$$\frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

QCOP LGQ.4



1. Comment peut-on montrer une inégalité ?
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Minorer la somme

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 + 1}{x_i}.$$

QCOP LGQ.5

1. Énoncer le principe de récurrence simple.
2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m \implies \sum_{k=m}^n a^k = \frac{a^m - a^{n+1}}{1 - a}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

et faire tendre n vers $+\infty$.

QCOP LGQ.6

1. Expliquer le principe du raisonnement par analyse-synthèse.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer qu'il existe $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire et $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire telles que
$$f = f_p + f_i.$$

3. On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x). \end{cases}$$

Déterminer les fonctions f_p et f_i .

QCOP LGQ.7 ★

1. Comment montrer l'unicité d'un objet dont on a établi l'existence ?
2. Montrer l'unicité dans le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
Montrer que :

$$a \equiv b \pmod{n}$$



a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .

QCOP LGQ.8

1. Comment montrer et comment utiliser une assertion débutant par un « $\forall$ » ?

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note les assertions suivantes :

$$(M_a) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon$$

$$(Z_a) \quad a = 0.$$

2. Montrer que :

$$(M_a) \iff (Z_a).$$

3. On considère « $(M_a) \implies (Z_a)$ ».

- a) Écrire la négation de cette implication.
- b) Écrire cette implication comme un « OU ».

QCOP LGQ.9

1. Comment montrer l'existence d'un objet ?
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x < t_0 < y.$$

- b) Montrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que :

$$x < t_1 < t_2 < y.$$