

Intégration sur un segment

Propriétés de l'intégrale

QCOP INTS.1



Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

1. Rappeler les propriétés de « croissance » et de « linéarité » de l'intégrale.

2. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

3. On suppose f continue. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq |b - a| \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

QCOP INTS.2 ★



Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler l'inégalité triangulaire intégrale pour une fonction réelle.

2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, à valeurs complexes.

- a) Justifier l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$e^{i\theta} \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}_+.$$

- b) Montrer que l'inégalité triangulaire intégrale est vraie pour des fonctions à valeurs complexes.

3. Montrer que $\int_0^x \frac{1}{1+it} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Théorème fondamental de l'analyse

QCOP INTS.3



Soit I un intervalle (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On note $F_{x_0} : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ lorsque cela a un sens.

1. Si f est continue par morceaux sur I , que dire de la régularité de F_{x_0} ?

2. Soit $a \in I$. On suppose f continue en a .

Montrer que F_{x_0} est dérivable en a et que $F_{x_0}'(a) = f(a)$.

3. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \implies f = 0 \text{ sur } I.$$

QCOP INTS.4

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue 2π -périodique.

À l'aide de $x \mapsto \int_x^{x+2\pi} f(t) dt$, montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

QCOP INTS.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Compléter et démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est } \dots \text{ sur } [a, b] \\ f \text{ est de signe } \dots \text{ sur } [a, b] \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \implies f = 0 \text{ sur } [a, b],$$

en étudiant la monotonie d'une fonction bien choisie.

3. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que :

$$|f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt = 0 \implies f = 0 \text{ sur } [a, b].$$

Sommes de Riemann**QCOP INTS.6**

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Montrer que :

$$I_n(f) = \int_a^b f(t) dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Montrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi}.$$

QCOP INTS.7 ★

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

- a) Montrer que $I_n(f) \rightarrow \int_a^b f(t) dt$.
- b) Faire un dessin.

2. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \rightarrow \ln(2)$.

3. Déterminer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$