

GRP. Groupes

QCOP GRP.1

1. Résultat. $\forall x, y \in G_1, \quad f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y).$
2. a) On rappelle que $e_1 *_1 e_1 = e_1$ et $f(e_1)$ est inversible dans G_2 .
 b) Utiliser que, pour $x \in G_1, x *_1 x^{-1} = e_1$.
 c) Procéder par récurrence pour les entiers positifs, exploiter la question précédente pour les négatifs.

QCOP GRP.2

3. Remarquer que $H = f^{(-1)}[\mathbb{Z}]$ où $f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ k & \longmapsto & (k, 0) \end{cases}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}^2, +)$.

QCOP GRP.3

3. On peut écrire $\{-1, 1\}$ comme l'image directe de $\mathbb{R}^*$ par l'application

$$\text{signe} : \mathbb{R}^* \longmapsto \{-1, 1\} \times \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On vérifie que cette application définit bien un morphisme de groupes.

QCOP GRP.4

3. a) ♦ L'implication $\Leftarrow$ se traite sans difficulté, connaissant la définition de morphisme de groupes.
 ♦ Pour $\Rightarrow$, on peut raisonner par récurrence pour montrer la propriété sur $\mathbb{N}$ et raisonner avec $-n \geq 0$ pour $n \leq 0$.
 b) Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. On peut fixer $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = n\alpha.$$

Raisonner ensuite avec la caractérisation de l'injectivité par le noyau.

Résultat. Tous les morphismes sauf le morphisme nul.