

Groupes

QCOP GRP.1



Soient $(G_1, *_1), (G_2, *_2)$ deux groupes.

Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme entre ces deux groupes.

- Définir « f est un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$ ».
- Introduire les notations nécessaires et fournir des démonstrations pour déterminer :
 - l'image par f de l'élément neutre de G_1 ;
 - l'image par f du symétrique d'un élément de G_1 ;
 - l'image par f de x^n pour $x \in G_1$ et $n \in \mathbb{Z}$.
- Définir le noyau de f et donner la caractérisation de l'injectivité de f par son noyau.
 - Écrire la définition et la propriété précédentes dans le cas des groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$.

QCOP GRP.2



Soient $(G_1, *_1), (G_2, *_2)$ deux groupes. Soit f un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.

- Soit $H_1 \subset G_1$. Définir « H_1 est un sous-groupe de G_1 ».
- Soit H_2 un sous-groupe de G_2 . Montrer que $f^{(-1)}[H_2]$ est un sous-groupe de G_1 .
- Soit B un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. Montrer, à l'aide du résultat précédemment établi, que $H := \{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 0) \in B\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

QCOP GRP.3



Soient $(G_1, *_1), (G_2, *_2)$ deux groupes. Soit f un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.

- Soit $H_2 \subset G_2$. Définir « H_2 est un sous-groupe de G_2 ».
- Soit H_1 un sous-groupe de G_1 . Montrer que $f[H_1]$ est un sous-groupe de G_2 .
- Montrer que $(\{-1, 1\}, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$ à l'aide de la question précédente.

QCOP GRP.4



Soient $(G_1, *_1), (G_2, *_2)$ deux groupes. Soit f un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.

- Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f .
- Montrer que

$$f \text{ est un morphisme de } (\mathbb{Z}, +) \text{ dans } (\mathbb{Z}, +) \iff [\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = n f(1)].$$

- Quels sont les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ injectifs ?

Indication. On pourra raisonner par analyse-synthèse.