

EPR. Espaces préhilbertiens réels

QCOP EPR.1

- a) Résultat.** $\|\lambda \cdot x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.

b) Résultat. Le discriminant de $t \mapsto \|t \cdot x + y\|^2$ est $\Delta = 4(\langle x | y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2)$.
- Par positivité de $\|t \cdot x + y\|^2$, le discriminant Δ est négatif (à comprendre).
- Distinguer le cas où $x = 0_E$ et $x \neq 0_E$. Il y a égalité si, et seulement si, le discriminant Δ est nul, c'est-à-dire si, et seulement si, $t \mapsto \|t \cdot x + y\|^2$ admet une unique racine t_0 . Ensuite, si $\|t_0 \cdot x + y\|^2 = 0$, par propriété de $\|\cdot\|$, on obtient $t_0 \cdot x + y = 0_E$.

QCOP EPR.2

- Résultat.** $\langle \cdot | \cdot \rangle : (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \mapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- Résultat.** $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$.
- Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $y = (1, \dots, 1)$.
Pour le cas d'égalité, reprendre le résultat général et le particulariser à ce cas : il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$ sont liés, c'est-à-dire :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = n \sum_{k=1}^n x_k^2 \iff x_1 = \dots = x_n.$$

QCOP EPR.3

- Résultat.** $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(A^\top B) \leq \sqrt{\text{Tr}(A^\top A)} \sqrt{\text{Tr}(B^\top B)}$.
- Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $A = M^\top$ et $B = M$.

QCOP EPR.4

- Calculer $\|x + y\|^2$ et $\|x - y\|^2$, puis soustraire les deux résultats obtenus.
- Appliquer l'identité de polarisation pour exprimer $\langle u(x) | u(y) \rangle$ et utiliser ensuite l'hypothèse sur u .

QCOP EPR.5

1. Partir d'une décomposition $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et calculer, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x | e_j \rangle$.

a) Résultat. $x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i.$

b) Résultat. $x = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x | e_i \rangle}{\langle e_i | e_i \rangle} e_i.$

2. Résultat. $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2}.$

QCOP EPR.6

1. Écrire la relation $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0_E$ et passer au produit scalaire avec les e_j pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ pour montrer que chaque $\lambda_j = 0$.

2. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas orthogonale pour le produit scalaire canonique.

3. Une telle famille peut-elle être libre ? Utiliser la contraposée du résultat de la première question.

QCOP EPR.7

1. Résultat. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale. Alors

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

La démonstration repose sur le développement par bilinéarité de $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \left| \sum_{j=1}^n x_j \right. \right\rangle.$

2. Oui, cela apparaît dans le développement $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2 \langle x_1 | x_2 \rangle + \|x_2\|^2.$

En revanche, cela ne fonctionne plus pour $n > 2$.

3. a) Il est conseillé de s'aider d'un dessin. Remarquer que les vecteurs $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ sont orthogonaux.

Résultat. $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et $\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2.$

QCOP EPR.8

1. **Résultat.** $p(x) \in \text{Vect}(a)$ et $x - p(x) \in \text{Vect}(a)^\perp$.
 2. Puisque $p(x) \in \text{Vect}(a)$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = \lambda_x a$. De plus, $x - p(x) \in \text{Vect}(a)^\perp$, donc $\langle x - p(x) | a \rangle = 0$.
 3. Utiliser que $d(x, \text{Vect}(a)^\perp) = \|x - p_{\text{Vect}(a)^\perp}\| = \|p(x)\|$.
- Résultat.** $d(x, \text{Vect}(a)^\perp) = \frac{|\langle x | a \rangle|}{\|a\|}$.

QCOP EPR.9

1. **Résultat.** L'application p_F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
En particulier, pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.
2. **a) Résultat.** $p_F(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\langle x | f_k \rangle}{\langle f_k | f_k \rangle} f_k$.
- b) Résultat.** $p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle x | f_k \rangle f_k$.
3. **a) Résultat.** $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
- b)** On commence par montrer, à l'aide du théorème de Pythagore, que :
$$\forall x_F \in F, \quad \|x - x_F\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - x_F\|^2.$$
4. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de F . L'objectif est de construire $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de F . On procède par récurrence, en posant $e_1 := v_1$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad e_{k+1} := p_{\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)^\perp}(v_{k+1}) = v_{k+1} - \sum_{\ell=1}^k \frac{\langle v_{k+1} | e_\ell \rangle}{\langle e_\ell | e_\ell \rangle} e_\ell.$$