

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz

QCOP EPR.1



Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Soient $x, y \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. a) Exprimer, à l'aide des propriétés de $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la quantité $\|\lambda \cdot x + y\|^2$.
b) Déterminer, lorsque $x \neq 0_E$, le discriminant de la fonction polynomiale $t \mapsto \|t \cdot x + y\|^2$.

2. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

3. Montrer que :

$$|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

QCOP EPR.2



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Quel est le produit scalaire usuel (canonique) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$?
2. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.
3. Montrer que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

et préciser les cas d'égalité.

QCOP EPR.3



Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} M_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \text{Tr}(A^T B). \end{cases}$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cet espace préhilbertien.
3. Montrer que : $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M^2) \leq \text{Tr}(M^T M)$.

QCOP EPR.4

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Donner la définition de « $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E ».
2. Soient $x, y \in E$. Montrer la *formule de polarisation* :

$$\langle x | y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

3. Soit $u \in L(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \lambda \|x\|.$$

Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \lambda^2 \langle x | y \rangle.$$

Orthogonalité, projection orthogonale

QCOP EPR.5

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Soient $x, y \in E$.

1. **a)** Exprimer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
b) Même question si $\mathcal{B}$ est supposée seulement orthogonale.
2. Exprimer $\langle x | y \rangle$ et $\|x\|$ en fonction des $\langle x | e_i \rangle$ et $\langle y | e_i \rangle$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

QCOP EPR.6

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_k) \in E^k$.

1. Montrer que :
 $\mathcal{F}$ est orthogonale $\implies \mathcal{F}$ est libre.

2. Montrer que la réciproque est fausse.

3. On suppose que :

$$\begin{cases} k > \dim(E) \\ \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, v_i \neq 0_E. \end{cases}$$

La famille $\mathcal{F}$ peut-elle être orthogonale ?

QCOP EPR.7

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore.
2. Dans le cas d'une famille de deux vecteurs, le théorème admet-il une réciproque ?
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On note p_F la projection orthogonale sur F .
 Soit $x \in E$.

- a)** Exprimer, en fonction de $\|x\|$ et de $\|p_F(x)\|$, la distance de x à F .
- b)** Montrer que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

QCOP EPR.8

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Soit $x \in E$. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$.

On note p la projection orthogonale sur le sous-espace $\text{Vect}(a)$.

1. Compléter :

$$p(x) \in \dots \quad \text{et} \quad x - p(x) \in \dots$$

2. À l'aide des caractérisations précédentes, et sans l'aide d'une formule générale, établir que :

$$p(x) = \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

3. Déterminer $d(x, \text{Vect}(a)^\perp)$.

QCOP EPR.9

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ de E .

On note p_F la projection orthogonale sur F .

1. Définir l'application p_F .

2. Soit $x \in E$. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthogonale de F .

a) Exprimer $p_F(x)$ dans cette base.

b) Même question lorsque la base est supposée orthonormée.

3. Soit $x \in E$.

a) Définir la distance de x à F , notée $d(x, F)$.

b) Montrer que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

4. Expliquer le principe de l'algorithme de Gram-Schmidt.

On donnera en particulier la formule à retenir, que l'on expliquera à l'aide de la notion de projection orthogonale.