

EDL. Équations différentielles linéaires

QCOP EDL.1

- a) Résultat.** $y_p'(\cdot) + a(\cdot)y_p(\cdot) = \lambda'(\cdot)e^{-A(\cdot)}$ et $\lambda'(\cdot) = b(\cdot)e^{A(\cdot)}$.

b) Utiliser le théorème fondamental de l'analyse : $\lambda(t) - \lambda(t_0) = \int_{t_0}^t \lambda'(s) ds$.

Résultat. $\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds$.

c) Résultat. $y_p(t) = e^{-A(t)}\lambda(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-(A(t)-A(s))} ds$.
- C'est ce qui précède.

QCOP EDL.2

- a) Résultat.** $P'(m) = 2am + b$ et $P''(m) = 2a$.

On rappelle que :

$$\begin{aligned} m \text{ n'est pas racine de } P &\implies P(m) \neq 0 \\ m \text{ est racine simple de } P &\implies P(m) = 0 \text{ et } P'(m) \neq 0 \\ m \text{ est racine double de } P &\implies P(m) = P'(m) = 0 \text{ et } P''(m) \neq 0. \end{aligned}$$

b) Résultat. $a y_p''(t) + b y_p'(t) + c y_p(t) = \left[\frac{P''(m)}{2} R''(t) + P'(m) R'(t) + P(m) R(t) \right] e^{mt}$.

c) De la question précédente, en déduire l'égalité :

$$\frac{P''(m)}{2} R'' + P'(m) R' + P(m) R = Q,$$

et utiliser le lien entre multiplicité d'une racine de P et dérivées de P (rappelé avant).

Résultat.

$$\begin{aligned} m \text{ n'est pas racine de } P &\implies \deg(R) = \deg(Q) \\ m \text{ est racine simple de } P &\implies \deg(R) = \deg(Q) + 1 \\ m \text{ est racine double de } P &\implies \deg(R) = \deg(Q) + 2. \end{aligned}$$
- Une solution particulière de (*) est donnée par $y_p(\cdot) = R(\cdot)$ où R est un polynôme dont le degré est donné par $\deg(Q)$ et la multiplicité de 0 en tant que racine de P .
- Une solution particulière de (*) est donnée par $y_p(\cdot) = R(\cdot)e^{mt}$ où R est un polynôme de degré au plus 2, en fonction de la multiplicité de m en tant que racine de P .