

Équations différentielles linéaires

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP EDL.1



Soient $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + a(t)y = b(t). \quad (*)$$

1. On note A une primitive sur $\mathbb{R}$ de a .

On définit $y_p : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ où $\lambda(\cdot)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à déterminer.

On suppose que y_p est une solution particulière de $(*)$.

- a) Calculer $y_p'(\cdot) + a(\cdot)y_p(\cdot)$ et en déduire $\lambda'(\cdot)$.
- b) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Exprimer, pour $t \geq t_0$, $\lambda(t) - \lambda(t_0)$ puis $\lambda(t)$.
- c) En déduire, pour $t \geq t_0$, $y_p(t)$.

2. Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante.

QCOP EDL.2



Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{K}$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$a y'' + b y' + c y = Q(t)e^{mt}, \quad (*)$$

et on note $P := aX^2 + bX + c$.

1. Soit $R \in \mathbb{K}[X]$. On considère $y_p : t \mapsto R(t)e^{mt}$.

- a) Calculer $P'(m)$ et $P''(m)$.
- b) Exprimer, pour $t \in \mathbb{R}$, $a y_p''(t) + b y_p'(t) + c y_p(t)$, en fonction de $P(m)$, $P'(m)$ et $P''(m)$.
On donnera le résultat sous la forme $[\alpha R''(t) + \beta R'(t) + \gamma R(t)]e^{mt}$.
- c) On suppose que $y_p(\cdot)$ est une solution particulière de $(*)$.
Donner, suivant la multiplicité de m comme racine de P , le degré de R .

2. Déduire de ce qui précède une méthode pour déterminer une solution particulière de $(*)$ lorsque $m = 0$ (i.e. le second membre est polynomial).

3. Déduire de même une méthode pour déterminer une solution particulière de $(*)$ lorsque Q est constant (i.e. le second membre est exponentiel).