

Développements limités

QCOP DL.1



1. Donner le développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0 de $\varepsilon \mapsto \frac{1}{1-\varepsilon}$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{4+x^2}$.
3. a) Rappeler les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$.
b) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $\tan(\cdot)$.

QCOP DL.2



Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \exp(zx)$.
3. En déduire les développements à l'ordre $2n$ en 0 de $\cosh(\cdot)$, $\sinh(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$.

QCOP DL.3



1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère :

$$f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha.$$

- a) Calculer les dérivées successives de la fonction f_α .
 - b) En déduire un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de f_α .
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

QCOP DL.4



1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I . On note F et G leur primitive s'annulant en 0.

Montrer que :

$$f(t) = \underset{t \rightarrow 0}{o}(g(t)) \text{ et } g \geq 0 \implies F(t) = \underset{t \rightarrow 0}{o}(G(t)).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de :
 $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$.

QCOP DL.5



1. Énoncer la formule de Taylor-Young.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$