

Dimension finie

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP DIM.1



Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in L(E, F)$.

1. Donner la définition du rang de f .
2. a) Justifier l'existence de S supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E .
 b) Montrer que $f|_S^{\text{Im}(f)}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 c) En déduire que :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

3. On se place dans le cas où $E = F$. Montrer que :

$$\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2).$$

QCOP DIM.2



Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. a) Écrire la formule du rang pour l'application :

$$\varphi : \begin{cases} F \times G & \longrightarrow & F + G \\ (u, v) & \longmapsto & u + v, \end{cases}$$

dont on justifiera la linéarité et la surjectivité.

- b) Montrer que l'application :

$$\psi : \begin{cases} F \cap G & \longrightarrow & \text{Ker}(\varphi) \\ u & \longmapsto & (u, -u) \end{cases}$$

est correctement définie et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- c) Conclure que :

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

2. On considère les assertions suivantes :

- (i) $F \cap G = \{0_E\}$;
- (ii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;
- (iii) $E = F + G$.

Montrer que $E = F \oplus G$ si, et seulement si, deux des assertions sont vérifiées.

QCOP DIM.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Énoncer le théorème du rang.
2. Donner un exemple de $f \in L(E)$ tel que :
$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).$$
3. Donner un exemple de $f \in L(\mathbb{R}^2)$ tel que :
$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f).$$

Indication. On pourra chercher f tel que :
$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect} \{(1, 0)\}.$$

QCOP DIM.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit φ une forme linéaire non nulle de E .

1. Écrire la formule du rang pour φ .
2. On suppose que $n = 2$.
Montrer que φ est surjective.
3. Déterminer la dimension des espaces suivants :

$$\begin{aligned} & \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0 \right\}, \\ & \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0 \right\}, \\ & \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}, \\ & \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}. \end{aligned}$$

QCOP DIM.7

1. Soient E, F deux espaces vectoriels de même dimension finie.

Soit $u \in L(E, F)$ injective. Que dire de u ?

2. On considère :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P - P'. \end{cases}$$

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $\varphi|_{\mathbb{K}_n[X]}$ est bijective.
- b) En déduire que φ est bijective.

QCOP DIM.4

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

Compléter :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ est libre} & \implies |\mathcal{F}| \leq n; \\ \mathcal{F} \text{ est génératrice} & \implies |\mathcal{F}| \geq n; \\ \mathcal{F} \text{ est une base} & \implies |\mathcal{F}| = n. \end{aligned}$$

2. Montrer que les implications réciproques ne sont pas vraies.
3. Soit $f \in L(E)$.
Montrer que $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est liée.

QCOP DIM.6

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner une base et la dimension de l'espace $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.
On donnera une base et la dimension des espaces mis en jeu.
3. Donner une base et la dimension des sous-espaces des matrices triangulaires supérieures et diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.
4. Donner la dimension des espaces suivants :

$$\begin{aligned} & \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(M) = 0 \right\}, \\ & \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M^T M) = 0 \right\}. \end{aligned}$$