

DET. Déterminants

QCOP DET.1

1. Résultat. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
2. Utiliser la formule précédente et $\det(A^\top) = \det(A)$.
3. Utiliser $\det(A^k) = \det(A)^k$.
4. Utiliser que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (justifié par la première question).

QCOP DET.2

1. Résultat. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\tilde{A}_{i,j}$ la matrice extraite de A dans laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j . Alors $\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \tilde{A}_{i,j})$.
2. Résultat. $A \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^\top$.
3. Utiliser la question précédente : calculer la comatrice d'une matrice de taille 2×2 .

Résultat. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

QCOP DET.3

1. a) Développer successivement par rapport à la première (resp. dernière pour la deuxième matrice) ligne jusqu'à faire disparaître le bloc contenant la matrice identité.
Résultat. $\det \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} = \det(C)$ et $\det \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix} = \det(A)$.
 b) Faire le produit des deux matrices précédentes.
2. Raisonner par récurrence en utilisant ce qui précède. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

QCOP DET.4

1. Utiliser que, pour deux matrices $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.
2. Prendre $A = I_n$ et B une matrice de déterminant 1 différente de l'identité. Il est à savoir que, si B et I_n sont semblables, alors $B = I_n$.
3. Toute matrice inversible est équivalente à l'identité (une manière de le retenir est d'utiliser le résultat plus fort « toute matrice de rang r est équivalente à J_r »). Il s'agit donc de prendre une matrice inversible de déterminant différent de 1.
4. Résultat. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors $\det(u) := \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$.

QCOP DET.5

Cet énoncé permet d'appréhender quelques notions qui seront abordées deuxième année. Le polynôme χ_A est appelé « polynôme caractéristique de A ».

1. Résultat. En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$.
2. a) D'après la formule précédente, $\det(XI_n - A)$ fait intervenir uniquement des sommes de produits de x , i.e. des puissances de x .
b) ♦ Le coefficient dominant de χ_A est 1 : pour obtenir le coefficient de degré n , la seule permutation à considérer dans la formule de $\det(XI_n - A)$ est $\sigma = \text{Id}_{[1,n]}$.
♦ Le coefficient constant est $(-1)^n \det(A)$ car $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$.
♦ Le coefficient de degré $n-1$ est plus délicat à obtenir : Pour $\sigma \neq \text{Id}_{[1,n]}$, les produits sont des polynômes de degré au plus $n-2$, donc :

$$\chi_A(X) = (X - a_{1,1}) \dots (X - a_{n,n}) + (\text{termes de degré au plus } n-2).$$

En développant, on obtient que le coefficient de degré $n-1$ est $-\text{Tr}(A)$.

3. La preuve est la même que pour montrer que deux matrices semblables ont même déterminant. En effet,

$$A = PBP^{-1} \implies XI_n - A = XI_n - PBP^{-1} = P(XI_n - B)P^{-1},$$

i.e. si A et B sont semblables, alors $XI_n - A$ et $XI_n - B$ sont semblables.

4. a) Utiliser la deuxième question.

Résultat. $\chi_A(X) = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + \det(A)$.

- b) Attention, il ne faut surtout pas procéder en calculant $\det(AI_n - A)$: cette quantité n'est pas égale à $\chi_A(A)$. La quantité $\chi_A(A)$ est une matrice de $M_2(\mathbb{C})$, tandis que le déterminant est un scalaire. Dans cette question, on procède en utilisant la formule qui précède. Un calcul direct donne bien que :

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_n = 0_2.$$