

Déterminants

QCOP DET.1



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\det(AB)$?

Les questions qui suivent sont indépendantes.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det(AA^T) \geq 0.$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$[\exists k \in \mathbb{N}^* : A^k = 0_n] \implies \det(A) = 0.$$

4. Montrer que :

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

QCOP DET.2



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Définir la comatrice de A , notée $\text{Com}(A)$.
2. Énoncer la formule reliant A à $\text{Com}(A)$ et l'écrire dans le cas où A est inversible.
3. On se place dans le cas $n = 2$ et A inversible. Déterminer A^{-1} en fonction des coefficients de A .

QCOP DET.3



Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

Soient les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $C \in M_p(\mathbb{C})$.

1. a) Calculer :

$$\det \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}.$$

b) En déduire $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$.

2. Généraliser : calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

QCOP DET.4



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \implies \det(A) = \det(B).$$

2. L'implication réciproque est-elle vraie en général ?

3. Le résultat subsiste-t-il pour A et B supposées seulement équivalentes ?

4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$. Définir $\det(u)$.

QCOP DET.5 ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

On note, pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_M : x \mapsto \det(xI_n - M)$.

1. Énoncer la formule donnant $\det(A)$ en fonction des coefficients de A .

2. a) Justifier que χ_A est une fonction polynomiale de degré n .

Ceci étant justifié, on note désormais χ_A le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont χ_A est la fonction polynomiale associée.

b) Montrer que :

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

3. Montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \implies \chi_A = \chi_B.$$

4. On se place dans le cas $n = 2$.

a) Exprimer χ_A en fonction de $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$.

b) Montrer que $\chi_A(A) = 0_2$.

On fera particulièrement attention au « type » des objets écrits et manipulés.