

Dérivabilité

Les intervalles I considérés ne sont pas vides ni réduits à un point.

QCOP DER.1



Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner et démontrer, sans utiliser le théorème de composition des dérivées, la dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$.
2. a) On suppose que f est paire. Que dire de f' ?
b) On suppose que f est impaire. Que dire de f' ?
3. Soit $T > 0$ tel que f est T -périodique. Que dire de f' ?

QCOP DER.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $c \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On considère les assertions suivantes :

- (i) c est intérieur à I ;
- (ii) f est dérivable en c ;
- (iii) f admet un extremum local en c ;
- (iv) $f'(c) = 0$.

1. Donner la définition de (iii).
2. Montrer que :
(i), (ii), (iii) $\implies$ (iv).
3. Donner, pour chaque situation, un exemple de I , f et c tels que :
 - a) (ii) et (iv) sont vraies, mais (iii) est fausse ;
 - b) (iii) est vraie, mais (ii) est fausse ;
 - c) (ii) et (iii) sont vraies, mais (i) et (iv) sont fausses.

QCOP DER.3 ★



Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $[a, b]$ un segment de I .

1. Soit $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que f est dérivable en c .
Donner une condition nécessaire pour que f admette un extremum local en c .
2. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
3. Le théorème de Rolle est-il vrai si f est à valeurs complexes ?

QCOP DER.4



1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0.$$

Montrer que f est injective.

QCOP DER.5

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Montrer que :
- f est dérivable en a

$$\iff \exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} \varphi \text{ est continue en } a \\ \forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a)\varphi(x). \end{cases}$$

2. Énoncer et démontrer un théorème de composition des dérivées.

QCOP DER.6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- a) Montrer que :

$$f \text{ est constante sur } I \iff \left[\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0 \right].$$

b) Montrer que le résultat reste vrai si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- Montrer que cette caractérisation est fausse si I n'est pas un intervalle.

QCOP DER.7

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis.
- Établir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| &\leq |x|; \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| &\leq |x - y|; \\ \forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} &< \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

QCOP DER.8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Définir les espaces $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
- Montrer que la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point.
- Donner un exemple de fonction continue non dérivable.
- Donner un exemple de fonction dérivable mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

QCOP DER.9 ★

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Soit $a \in I$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I; \\ f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\}; \\ (f|_{I \setminus \{a\}})' \text{ admet pour limite } \ell \text{ en } a. \end{cases}$$
 - Que dire si $\ell \in \mathbb{R}$? Le démontrer.
 - Que dire si $\ell = \pm\infty$?
- Montrer que $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.