

Comparaisons des suites

Contre-exemples aux compositions d'équivalents

QCOP CSUIT.1



Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.

1. Définir « $u_n \sim v_n$ ».
2. Montrer que, en général :

$$u_n \sim v_n \not\Rightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}.$$
3. On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que :

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff u_n - v_n \longrightarrow 0.$$

QCOP CSUIT.3



Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang.
Soit $C > 0$.

1. Définir « $u_n \sim v_n$ » à l'aide d'une limite égale à 0.
2. Montrer que, en général :

$$u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n + C \sim v_n + C.$$
3. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \longrightarrow +\infty \end{array} \right\} \implies u_n + C \sim v_n + C.$$

QCOP CSUIT.2



1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \longrightarrow e^a.$$
2. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
Montrer que, en général :

$$u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n^n \sim v_n^n.$$

QCOP CSUIT.4



Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang.

1. Définir « $u_n \sim v_n$ » à l'aide d'une limite égale à 0.
2. Montrer que, en général :

$$u_n \sim v_n \not\Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$
3. On suppose que :

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \longrightarrow \ell \in [0, +\infty] \setminus \{1\} \end{cases}$$
 - a) Vérifier que $\left(\frac{1}{\ln(v_n)}\right)_n$ est bornée.
 - b) Montrer que

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 \longrightarrow 0.$$
 - c) En déduire que

$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

Autres relations de comparaisons

QCOP CSUIT.5



Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites complexes.

1. Donner les définitions avec quantificateurs de « $u_n = o(v_n)$ » et « $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ».

2. Montrer que :

$$u_n = o(v_n) \implies u_n = \mathcal{O}(v_n)$$

3. Donner une suite qui est un $\mathcal{O}(n)$ mais pas un $o(n)$.

QCOP CSUIT.6



1. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

a) Définir « $w_n = o(v_n)$ ».

b) Caractériser « $u_n \sim v_n$ » à l'aide d'un $o(\cdot)$.

2. On admet que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$