

Nombres complexes

Partie réelle, partie imaginaire

QCOP CPLX.1



1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- a) Définir $\Re(z)$ et $\Im(z)$.
- b) Exprimer ces quantités en fonction de z et $\bar{z}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Compléter et démontrer les équivalences suivantes :

$$z + \bar{z} = 0 \iff z \in \dots \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 0 \iff z \in \dots$$

3. On admet que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Déterminer $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{ia} + e^{ib} \in \mathbb{R}\}$.

Inégalité triangulaire

QCOP CPLX.2



Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que :

$$\Re(z) \leq |z| \quad \text{et} \quad \Im(z) \leq |z|.$$

2. Montrer que :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{z}') + |z'|^2.$$

3. Montrer que :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

4. Montrer que :

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

QCOP CPLX.3 ★



1. Énoncer l'inégalité triangulaire complexe.

2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

Compléter et démontrer :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \dots$$

3. Soient A, B et C trois points du plan.

Montrer que A, B et C sont alignés dans cet ordre si, et seulement si,

$$\|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\| = \|\vec{AC}\|.$$

Exponentielle complexe

QCOP CPLX.4



Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Exprimer le nombre e^z sous forme trigonométrique.
2. Déterminer le module et un argument de e^z .
3. Compléter et démontrer :
 $|e^z| = 1 \iff \dots$
4. Montrer que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

QCOP CPLX.5



1. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, de module $R > 0$ et d'argument principal $\theta \in \mathbb{R}$.
Écrire Z sous forme trigonométrique.
2. Soit $Z \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble :
 $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = Z\}$.
3. Résoudre l'équation :
 $e^z = 1 + i$.

Racines de l'unité et équations polynomiales

QCOP CPLX.6



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. Définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
2. Montrer que :
 $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.
3. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

QCOP CPLX.7 ★



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. Définir et décrire l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
2. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit $Z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Décrire $A := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = Z\}$.
3. Calculer $\sum_{\omega \in A} \omega$ et $\prod_{\omega \in A} \omega$.

QCOP CPLX.8



Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. À l'aide de $\mathbb{U}_2$, justifier l'existence de $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.
On note $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$.
 - a) Compléter et démontrer :

$$z^2 = a \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \dots \\ x^2 + y^2 = \dots \\ \text{signe}(xy) = \dots \end{cases}$$
 - b) En déduire les expressions, sous forme algébrique, des valeurs possibles de z .

QCOP CPLX.9



Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère :
 $az^2 + bz + c = 0. \quad (E)$

1. On note $\Delta := b^2 - 4ac$.
 - a) Déterminer $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
 - b) Déterminer $u, v \in \mathbb{C}$ tels que :
 $z \text{ vérifie } (E) \iff (z - u)^2 = v^2$.
 - c) En déduire les solutions de (E).
2. Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. Comment peut-on calculer les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = d_1 \\ z_1 \times z_2 = d_2 \end{cases} ?$$