

Calcul intégral

QCOP CINT.1



1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Que nous apprend-il sur les fonctions continues ?
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$. Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

3. Déterminer les primitives de la fonction $\ln(\cdot)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

QCOP CINT.2



1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Énoncer la formule donnant la dérivée d'une composée.
3. Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall a, b \in J, \quad \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

QCOP CINT.3 ★



1. Donner la dérivée de la fonction $\arctan(\cdot)$.
2. Soit $a > 0$. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

3. En déduire une méthode pour calculer une primitive d'une fonction

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c},$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

QCOP CINT.4



1. Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de la dérivée de la fonction u^a .
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.
3. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [e, +\infty[$. Calculer :

$$\int_e^x \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt.$$

QCOP CINT.5



Soit f une fonction continue. On note $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et, pour $a \in \mathbb{R}_+$, $I_a := \int_{-a}^a f(t) dt$.

1. On suppose que f est une fonction paire.
 - a) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Dessiner et calculer (sans utiliser de primitive) l'intégrale I_a .
 - b) Quelle est la parité de F ?
2. Mêmes questions en supposant que f est une fonction impaire.