

ARIPOL. Arithmétique des polynômes

QCOP ARIPOL.3

2. Écrire les relations de Bézout et les multiplier.
3. ♦ Pour la première, raisonner par récurrence sur k .
 ♦ Pour la deuxième, fixer k et utiliser la première avec changement de notation, ou raisonner de nouveau par récurrence.
4. Pour montrer que $(X - a) \wedge (X - b) = 1$, faire la différence des deux pour trouver une relation de Bézout. On en déduit le résultat par récurrence.

QCOP ARIPOL.4

1. a) Le complexe $\bar{a}$ est également racine de P . Écrire P sous forme développée.
 b) On a $(X - a)(X - \bar{a}) = X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2$. Utiliser ensuite successivement (d'abord pour $X - a$ puis $X - \bar{a}$ le résultat

$$\ll \alpha \text{ est racine de } P \iff \exists Q \in \mathbb{C}[X] : P = (X - \alpha)Q \gg.$$
 Pour montrer que le polynôme obtenu est réel, utiliser la conjugaison.
2. La question précédente nous donne les irréductibles de degré 2 intervenant dans cette décomposition.

QCOP ARIPOL.5

4. On peut prendre $P := (X^2 + 1)(X^2 + 4)$.