

AL. Applications linéaires

QCOP AL.1

1. Résultat. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.
2. Les égalités « $u^2(x) = u(x)^2$ » et « $u(xy) = u(x)u(y)$ » n'ont aucun sens car un espace vectoriel n'a pas de loi de multiplication interne.
3. Résultat. Une application linéaire constante est nulle.
Utiliser que $u(0_E) = 0_F$.

QCOP AL.2

1. Résultat. u est injective $\iff \text{Ker}(u) = \{0_E\}$.
2. a) Écrire $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$, de sorte que $u[\mathcal{F}] = (u(e_1), \dots, u(e_n))$.
En se donnant $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0_F$, utiliser la linéarité de u pour montrer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f)$, puis conclure en utilisant la liberté de $\mathcal{F}$.
b) Résultat. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E . Si $u[\mathcal{F}]$ n'est pas libre, alors u n'est pas injective.
3. Contre-exemple économique : $u = 0_{L(E)}$.
Autre contre-exemple : $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x + y \end{cases}$ et $\mathcal{F} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

QCOP AL.3

1. Les ensembles $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E (exercice : le démontrer).
2. Résultat. $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$ et $\text{Im}(u^k) \supset \text{Im}(u^{k+1})$.
Résultat. $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u + v)$ et $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) \supset \text{Im}(u + v)$.

QCOP AL.4

1. Résultat. $\lambda x = 0_E \iff [\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E]$.
2. a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u^k \in L(E)$ (puissance d'un endomorphisme). Comme combinaison linéaire de puissances d'un endomorphisme, $P(u) \in L(E)$.
b) Procéder par récurrence.
c) Évaluer l'endomorphisme $P(u)$ en x et utiliser la question précédente.
d) Utiliser la question précédente et la première question.

QCOP AL.5

1. Résultat. $p : \begin{cases} E = F \oplus G \longrightarrow E \\ x = x_F + x_G \longmapsto x_F. \end{cases}$
2. Utiliser la définition.
3. ♦ Pour montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$, raisonner par analyse-synthèse, en utilisant la question précédente.
♦ Montrer que $E = \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$.
4. a) L'endomorphisme $-p$ vérifie-t-il « $f \circ f = f$ » ?

QCOP AL.6

1. Résultat. $s : \begin{cases} E = F \oplus G \longrightarrow E \\ x = x_F + x_G \longmapsto x_F - x_G. \end{cases}$
2. Utiliser la définition.
3. ♦ Pour montrer que $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) + \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, raisonner par analyse-synthèse, en utilisant la question précédente.
♦ Montrer que $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{0_E\}$.
4. a) L'endomorphisme nul vérifie-t-il « $f \circ f = \text{Id}_E$ » ?

QCOP AL.7

4. Pour chaque sous-ensemble proposé, il s'agit de l'écrire comme l'intersection de noyaux de formes linéaires non nulles (i.e. de les écrire comme intersection d'hyperplans).

QCOP AL.8

1. Comme φ est non nulle, on peut fixer $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Pour $y \in \mathbb{R}$, en posant $x := y \frac{x_0}{\varphi(x_0)}$, on a $\varphi(x) = y$.
2. b) Il s'agit de montrer que toute forme linéaire de $\mathbb{K}^n$ est une application de la forme :
$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Pour montrer cela, on peut raisonner par analyse-synthèse, en appliquant φ aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $(1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, 1)$.
3. a) ♦ Montrer que $H \cap \text{Vect}\{x_0\} = \{0_E\}$ se fait sans difficulté.
♦ Pour montrer que $E = H + \text{Vect}\{x_0\}$, on peut raisonner par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, on se donne, pour $x \in E$, $x_H \in H$ et $x_D = \lambda x_0 \in E \setminus H$ tels que $x = x_H + \lambda x_0$. On peut d'abord déterminer λ , donc x_D , puis on peut en déduire x_H .
b) Résultat. Oui, la réciproque est vraie.
4. La difficulté repose dans la démonstration de $(\Rightarrow)$. Tout vecteur $x_0 \in E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ peut définir un tel λ : par exemple, $\lambda = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$. On peut ensuite vérifier la propriété en utilisant la question précédente, avec $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$.