

Applications linéaires

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP AL.1



Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $u \in L(E, F)$.

1. Définir « u est une application linéaire de E dans F ».
2. Soient $x, y \in E$ avec $y \neq 0_E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Entourer les égalités vraies et rayer celles n'ayant pas de sens.

$$u(0_E) = 0_F, \quad u^2(x) = u(x)^2, \quad u(\lambda y + x) = \lambda u(y) + u(x), \quad u(xy) = u(x)u(y).$$

3. Que dire d'une application linéaire constante ? Justifier.

QCOP AL.2



Soient E et F deux espaces vectoriels.
Soit $u \in L(E, F)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de u .
2. a) Soit $\mathcal{F}$ une famille finie libre de E .
Montrer que, si u est injective, $u[\mathcal{F}]$ est libre dans F .
b) Écrire la contraposée de ce résultat.
3. Le résultat est-il toujours vrai si u n'est plus supposée injective ?

QCOP AL.3



Soit E un espace vectoriel. Soient $u, v \in L(E)$.

1. Définir les ensembles $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
Quelle structure ont-ils par rapport à E ?
2. Compléter par un symbole « $\subset$ » ou « $\supset$ » et démontrer les inclusions :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \text{Ker}(u^k) \cdots \text{Ker}(u^{k+1}) \\ \text{Im}(u^k) \cdots \text{Im}(u^{k+1}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \cdots \text{Ker}(u + v) \\ \text{Im}(u) + \text{Im}(v) \cdots \text{Im}(u + v). \end{cases}$$

QCOP AL.4 ★



Soit E un espace vectoriel.
Soit $x \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Compléter :
 $\lambda x = 0_E \iff \dots$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
Soit $u \in L(E)$. On note :

$$P := \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k.$$

On suppose que $u(x) = \lambda x$.

- a) Justifier que $P(u) \in L(E)$.
- b) Montrer que :
 $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(x) = \lambda^k x.$
- c) En déduire que :
 $(P(u))(x) = P(\lambda)x.$
- d) On suppose que $x \neq 0_E$.
Que dire si $P(u) = 0_{L(E)}$?

QCOP AL.5

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = F \oplus G.$$

On note p le projecteur sur F parallèlement à G .

1. Définir l'application p .
2. Montrer que $p \circ p = p$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.
4. **a)** L'application $-p$ est-elle un projecteur de E ?
b) L'ensemble des projecteurs de E est-il un sous-espace vectoriel de $L(E)$?

QCOP AL.6

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = F \oplus G.$$

On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

1. Définir l'application s .
2. Montrer que $s \circ s = \text{Id}_E$.
3. Montrer que :
$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E).$$
4. **a)** L'application $0_{L(E)}$ est-elle une symétrie de E ?
b) L'ensemble des symétries de E est-il un sous-espace vectoriel de $L(E)$?

QCOP AL.7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $H \subset E$.

1. Donner la définition de « H est un hyperplan de E ».
2. Soit $\varphi \in L(E, \mathbb{K})$. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E . Quelle structure a l'ensemble $H_1 \cap H_2$ par rapport à E ?
4. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}, \quad \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \right\},$$

$$\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u_n \rightarrow 0 \right\}, \quad \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(M) = 0 \right\}.$$

QCOP AL.8 ★

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit H un sous-espace vectoriel de E .

1. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E . Montrer que φ est surjective.
2. Supposons que H est un hyperplan de E .
a) Donner la définition de « H est un hyperplan de E ».
b) On se place dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} : H = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}.$$
3. **a)** Montrer que, si H est un hyperplan, alors pour tout $x_0 \in E \setminus H$, $E = H \oplus \text{Vect}\{x_0\}$.
b) Sans justification, a-t-on une réciproque ?
4. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E . Montrer que :
$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \iff [\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \varphi = \lambda \psi].$$