

Colle 2 • INDICATIONS

Raisonnements, Ensembles, Coefficients binomiaux

Exercice 2.1

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 3 impaires.

indication

Raisonnement par analyse-synthèse. En se donnant f une fonction polynomiale de degré 3, déterminer des conditions sur les coefficients $a_0, \dots, a_3$ pour avoir

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(-x) = 0.$$

On pourra en particulier évaluer cette relation en certains points.

résultat

Les fonctions répondant au problème sont dans l'ensemble $\{x \mapsto a_3x^3 + a_1x ; a_1, a_3 \in \mathbb{R}\}.$

Exercice 2.2

1. Déterminer la solution x_0 de l'équation :

$$x^2 + 8x + 16 = 0.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n.$$

Montrer que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n.$$

indication

1. Méthode classique.

2. Raisonnement par analyse-synthèse. Évaluer en $n = 0$ et $n = 1$ pour déterminer λ et μ puis, dans la synthèse, raisonner par récurrence à deux prédécesseurs.

résultat

$$x_0 = -4.$$

Exercice 2.3

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$.

Soit $r \in [p, q]$.

Montrer que :

$$\exists \theta \in [0, 1] : \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

indication

Raisonnement par analyse-synthèse, en n'oubliant pas de vérifier que la solution trouvée est bien dans $[0, 1]$.

Exercice 2.4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

1. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$.

2. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = x.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

indication

1. Tester avec des valeurs stratégiques. Notamment, pour tout réel x , $x = 1 \times x$.
2. Raisonnement par analyse-synthèse.

résultat

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)x$.
2. $x_1 = \frac{x + f(x)}{2}$ et $x_2 = \frac{x - f(x)}{2}$.

Exercice 2.5

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

indication

- ◆ Raisonnement par analyse-synthèse.
- ◆ Évaluer en $(x, y) = (0, 0)$ pour obtenir les valeurs possibles de $f(0)$.
- ◆ Déterminer la seule valeur possible de $f(0)$ puis évaluer de nouveau l'équation en $y = 0$.

résultat

$$f : x \mapsto 1 + x.$$

Exercice 2.6

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :
 $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$

indication

- ◆ Raisonner par analyse-synthèse.
- ◆ Évaluer en $(x, y) = (0, 0)$ pour obtenir $f(0)$.
- ◆ Fixer y et dériver la fonction en x puis évaluer en $x = 0$ pour obtenir $f'(y)$.
- ◆ En déduire f par intégration.

résultat

Les fonctions solutions sont les éléments de :
 $\{x \mapsto \lambda x ; \lambda \in \mathbb{R}\}.$

Exercice 2.7

Soit E un ensemble.

Soient A, B, C trois parties de E .

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array} \right\} \iff B = C.$$

indication

On pourra commencer par montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array} \right\} \iff B \subset C.$$

Exercice 2.8

Soit E un ensemble.

Soient A, B, C trois parties de E .

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} B \cup C \subset A \cap C \\ A \subset B \cap C \end{array} \right\} \iff A = B = C.$$

Exercice 2.9

On note :

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^{-x}\}, \\ B &:= \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Décrire l'ensemble :

$$\Sigma := \{a + b ; a \in A, b \in B\}.$$

indication

- ☐ Se montre moins difficilement que la réciproque.
- ☐ On se donne $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. On détermine d'abord y_A et y_B (tels que $(x_A, y_A) \in A$ et $(x_B, y_B) \in B$), puis l'on construit x_A en admettant que tout nombre réel strictement positif « s'écrit comme une exponentielle ». On pose enfin x_B et on peut conclure.

résultat

$$\Sigma = \{a + b ; a \in A, b \in B\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 2.10

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n := \frac{\sqrt{n+1}}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.
Montrer que la suite $(u_n^2)_n$ est monotone.

indication

En notant $v_n := u_n^2$, calculer le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ (en justifiant son existence) et le comparer à 1 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}.$$

résultat

La suite $(u_n^2)_n$ est décroissante.

Exercice 2.11

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{2}.$$

indication

Raisonner par récurrence, en écrivant que $\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Exercice 2.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right)}{n!} = u_n \binom{2n}{n}.$$

indication

Développer le numérateur, faire apparaître les quantités $(2n)!$, $n!$ et factoriser par une puissance de 2.

résultat

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}\binom{n}{2n}.$$