

Colle 2

Raisonnements, Ensembles, Coefficients binomiaux

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous avez une semaine pour faire ce travail et le déposer dans la boîte en B013 ou en ligne.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Raisonnements

Exercice 2.1

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ lorsque :
 $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 3 impaires.

Exercice 2.2

1. Déterminer la solution x_0 de l'équation :

$$x^2 + 8x + 16 = 0.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n.$$

Montrer que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n.$$

Exercice 2.3

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$.

Soit $r \in [p, q]$.

Montrer que :

$$\exists \theta \in [0, 1] : \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Exercice 2.4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

1. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$.

2. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

Exercice 2.5

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 2.6

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Ensembles

Exercice 2.7

Soit E un ensemble.

Soient A, B, C trois parties de E .

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array} \right\} \iff B = C.$$

Exercice 2.8

Soit E un ensemble.

Soient A, B, C trois parties de E .

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} B \cup C \subset A \cap C \\ A \subset B \cap C \end{array} \right\} \iff A = B = C.$$

Exercice 2.9

On note :

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^{-x}\},$$

$$B := \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Décrire l'ensemble :

$$\Sigma := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Coefficients binomiaux

Exercice 2.10

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n := \frac{\sqrt{n+1}}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

Montrer que la suite $(u_n^2)_n$ est monotone.

Exercice 2.11

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{2}.$$

Exercice 2.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right)}{n!} = u_n \binom{2n}{n}.$$