

Colle 30 • INDICATIONS

Probabilités, Variables aléatoires

Exercice 30.1

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100. On lance ce dé et on obtient 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100.
On lance ce dé n fois et on obtient n fois 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

indication

On note les événements :

S : « obtenir 6 » et T : « le dé est truqué ».

1. Utiliser la formule de Bayes pour calculer $\mathbb{P}_S(T)$. Pour calculer $\mathbb{P}(S)$, utiliser la formule des probabilités totales.

2. On note de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n : « obtenir 6 n fois ».

(a) Utiliser la formule de Bayes : $p_n = \mathbb{P}_{S_n}(T) = \frac{\mathbb{P}_T(S_n)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(S_n)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\bar{T}}(S_n)\mathbb{P}(\bar{T})}$.

résultat

1. $\mathbb{P}_S(T) = \frac{1}{2}$.

2. $p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^n - 1}} \rightarrow 1$

Exercice 30.2

On dispose de 120 pièces dont 40 sont pipées.

Pour chaque pièce pipée, la probabilité d'obtenir FACE est de $\frac{2}{3}$.

1. On tire une pièce au hasard parmi les 120. On lance cette pièce et on obtient FACE.

Quelle est la probabilité que cette pièce soit pipée ?

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire une pièce au hasard parmi les 120.

On lance cette pièce n fois et on obtient n fois FACE.

Quelle est la probabilité p_n que cette pièce soit pipée ?

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

indication

On note les événements :

F : « obtenir FACE » et T : « la pièce est truquée ».

1. Utiliser la formule de Bayes pour calculer $\mathbb{P}_F(T)$. Pour calculer $\mathbb{P}(F)$, utiliser la formule des probabilités totales.

2. On note de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « obtenir FACE n fois ».

(a) Utiliser la formule de Bayes : $p_n = \mathbb{P}_{F_n}(T) = \frac{\mathbb{P}_T(F_n)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(F_n)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\bar{T}}(F_n)\mathbb{P}(\bar{T})}$.

résultat

1. $\mathbb{P}_F(T) = \frac{2}{5}$.

2. $p_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n} \rightarrow 1$

Exercice 30.3

On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

indication

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec X et $\varepsilon \leftarrow \varepsilon n$, ou avec $Y := \frac{X}{n}$ pour montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

résultat

$$n \geq 27778.$$

Exercice 30.4

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité p_n .

indication

- ◆ Calculer p_1 .
- ◆ Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} en fonction de p_n .
 - ◇ Poser A_n l'évènement « avoir une somme paire au n -ième lancer ».
 - ◇ Utiliser la formule des probabilités totales dans le S.C.E. $(A_n, \overline{A_n})$ pour calculer $\mathbb{P}(A_{n+1})$.
- ◆ Reconnaître que la suite $(p_n)_n$ est arithmético-géométrique et en déterminer son terme général.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-1}{5} \right)^n + 1 \right).$$

Exercice 30.5

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

- (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
- (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

- (a) Déterminer la loi de X .
- (b) Déterminer la loi de Y .

résultat

- 1. (a) $X \sim \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{5}\right)$, $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{4}{5}$.
(b) $Y = 5X - 15$, $\mathbb{E}[X] = -10$ et $\mathbb{V}[X] = 20$.
- 2. (a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.
(b) $Y(\Omega) = \{5k - 15 ; k \in \{0, 1, 2\}\}$, $\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \mathbb{P}(X = k)$.

Exercice 30.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

résultat

1. $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{n}{n+2}, \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2n}{(n+2)(n+1)} \text{ et } \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}.$$

2. $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(Y = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$

Exercice 30.7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. (a) Calculer $\mathbb{E}[X]$.
(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X]$. Interpréter ce résultat.

résultat

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

2. (a) $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}^{n-1}.$

(b) $\mathbb{P}(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 1).$

3. $\mathbb{E}[X] = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Exercice 30.8

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers $n \in \mathbb{N}$ correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X . Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

(a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{X=i}(Y = k)$.

(b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication. On pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :

$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

(c) Déterminer l'espérance et la variance de Z .

résultat

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

2. (a) $\mathbb{P}_{X=i}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(b) $Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

(c) $\mathbb{E}[Z] = np(2-p)$ et $\mathbb{V}[Z] = np(2-p)(p-1)^2$.

Exercice 30.9

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance et une variance.

On fixe $c \geq 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n] = c$ et on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}[X_n] = 0$.

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0.$$

indication

◆ Utiliser l'inégalité triangulaire pour étudier séparément :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geq \varepsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{E}[X_n] - c| \geq \varepsilon).$$

◆ Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geq \varepsilon)$.

Exercice 30.10

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$.

1. Préciser les lois des variables X et Y .
2. Calculer la covariance des variables X et Y . Celles-ci sont-elles indépendantes ?
3. Les variables $U := X + Y$ et $V := X - Y$ sont-elles indépendantes ?

résultat

1. X et Y suivent la même loi, avec $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4}$.
2. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.
3. U et V suivent une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et sont indépendantes.

Exercice 30.11 Inégalité de Cantelli.

Soit X une variable aléatoire admettant une variance σ^2 finie.

Montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

indication

- ◆ Commencer par établir que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq a) \leq \frac{t^2 + \sigma^2}{(a + t)^2}.$$

Pour cela, on pourra s'inspirer de la preuve de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en utilisant la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}[X] + t$.

- ◆ En optimisant en t , en déduire que :

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

- ◆ Appliquer l'inégalité précédente à $-X$ également.