

Colle 29 • INDICATIONS

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 29.1

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

indication

$$2. \text{ Écrire } \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x).$$

résultat

$$2. p_F(u) = \left(x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x) \right).$$

Exercice 29.2

On se place dans $M_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi : (A, A') \mapsto \text{Tr}(A^\top A')$.

On note $\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

indication

$$1. \text{ Écrire } \mathcal{F} = \text{Vect}(I_2, K) \text{ avec } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$, on a :

$$M \in \mathcal{F}^\perp \iff [\varphi(M, I_2) = 0 \text{ et } \varphi(M, K) = 0].$$

3. Écrire $J = I_2 + B$ avec $B \in \mathcal{F}^\perp$.

4. Utiliser que $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|p_{\mathcal{F}^\perp}(J)\|$.

résultat

1. $\mathcal{F} = \text{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
2. $\mathcal{F}^\perp = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
3. $p_{\mathcal{F}^\perp}(J) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $d(J, \mathcal{F}) = \sqrt{2}$.

Exercice 29.3

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique. On définit :

$$F := \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .
2. En déduire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F .
3. Calculer la distance d'un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ à F .

Exercice 29.4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On se place dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, et on considère :

$$G := \text{Vect} \{I_n\}.$$

1. Déterminer $G^\perp$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Déterminer le projeté orthogonal de A sur $G^\perp$, noté $p_{G^\perp}(A)$.

indication

2. Déterminer le projeté sur G puis relier la projection sur G à la projection sur $G^\perp$.

résultat

1. $G^\perp = \text{Ker}(\text{Tr})$.
2. $p_{G^\perp}(A) = A - \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n$.

Exercice 29.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = A^\top = A.$$

Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}.$$

indication

- ◆ Puisque A est la matrice d'un projecteur, $\text{Tr}(A) = \text{rg}(A)$.
- ◆ Utiliser ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, avec la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et la matrice $(|a_{i,j}|)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 29.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer :

$$\lambda_A := \inf \left\{ \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 ; (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

indication

Le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$ est $\frac{A + A^T}{2}$.

résultat

$$\lambda_A = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Exercice 29.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$[\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X = 0] \iff A \text{ est antisymétrique.}$$

indication

- ◆ Montrer que :

$$[\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A Y = 0] \iff A = 0_n.$$

- ◆ Pour le sens $(\Leftarrow)$, transposer.
- ◆ Pour le sens $(\Rightarrow)$, calculer $(X + Y)^T A (X + Y)$ et utiliser ce qui précède.

Exercice 29.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n .

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E .

indication

- *A priori*, $n \neq p$ donc il s'agit de montrer la liberté et le caractère générateur de la famille considérée.
- CARACTÈRE LIBRE. On montre que la famille est orthonormale. On peut calculer, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\|e_j\|^2$.

► CARACTÈRE GÉNÉRATEUR. On montre que $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. On peut montrer que

$$\forall x \in E, \quad p_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)}(x) = x$$

en montrant que $\|x - p_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)}(x)\| = 0$.

Exercice 29.9

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Soit p un projecteur de E .

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) p est un projecteur orthogonal
- (ii) $\forall x, y \in E, \quad \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$
- (iii) $\forall x \in E, \quad \langle x | p(x) \rangle \geq 0$
- (iv) $\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

indication

On note $F := \text{Im}(p)$.

♦ (i) $\implies$ (ii) : $y = \underbrace{p(y)}_{\in F} + \underbrace{y - p(y)}_{\in F^\perp}$.

♦ (ii) $\implies$ (i) : montrer que $y \in \text{Im}(p)$ est orthogonal à $x \in \text{Ker}(p)$.

♦ (i) $\implies$ (iii) : $x = x - p(x) + p(x)$.

♦ (iii) $\implies$ (i) : développer $\langle p(x + ty) | x + ty \rangle$ où $x \in \text{Ker}(p)$ et $y \in \text{Im}(p)$.

♦ (i) $\implies$ (iv) : utiliser le théorème de Pythagore.

♦ (iv) $\implies$ (i) : utiliser l'inégalité

$$\|p(y + tx)\|^2 \leq \|y + tx\|^2$$

avec $x \in \text{Ker}(p)$ et $y \in \text{Im}(p)$ pour montrer que $\langle x | y \rangle = 0$.

Exercice 29.10

On se place dans $E := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on considère :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : (f, g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

On note, pour $f \in E$, $\|f\| := \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

2. Montrer que :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} \|f\|.$$

3. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \longmapsto t^n$ de E .

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les quantités $\|f_n\|$ et $\|f_n\|_\infty$.

(b) Que dire ?

indication

- ◆ Ne pas oublier de vérifier que la quantité définissant $\langle f | g \rangle$ existe bien.
◆ Pour le caractère « défini positif », montrer que la fonction intégrée est constante puis qu'elle est nulle.
- ◆ Utiliser le théorème fondamental de l'analyse : $\forall x \in [0, 1], f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$.
◆ Montrer et utiliser : $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
◆ Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $\int_0^x f'(t) dt$.
- (b) Calculer $\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty}$ et faire tendre $n \rightarrow +\infty$.

résultat

- (a) $\|f_n\| = \frac{n^2}{2n-1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.
(b) Il n'existe pas de constante C telle que $\|\cdot\| \leq C \|\cdot\|_\infty$.
En deuxième année, on dit que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 29.11

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ et on considère :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)Q^{(n)}(0)}{(n!)^2}.$$

- Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Déterminer l'orthogonal des ensembles suivants :
 $F_0 := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ et $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.

indication

- ◆ Ne pas oublier de vérifier que la quantité définissant $\varphi(P, Q)$ existe bien.
◆ Pour le caractère « défini positif », utiliser la caractérisation de la multiplicité des racines par les dérivées successives ou la formule de Taylor polynomiale.
- Écrire F_0 et F_1 comme des sous-espaces vectoriels engendrés (i.e. « comme des Vect $\{\dots\}$ »), et utiliser la formule de Taylor polynomiale.

résultat

- ◆ $F_0 = \text{Vect} \{X^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $F_0^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.
◆ $F_1 = \text{Vect} \{X^n - 1\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $F_1^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Exercice 29.12 Suites de carré sommable.

On considère :

$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n |a_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

On définit sur $\ell^2 \times \ell^2$ l'application :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : ((a_n)_n, (b_n)_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n.$$

1. Montrer que $(\ell^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

2. On considère :

$$F := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p, a_n = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2 , différent de ℓ^2 .

(b) Montrer que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

indication

- Il faut montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puis montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire. L'inégalité suivante sera utile : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.
- (b) Calculer le produit scalaire entre une suite de $F^\perp$ et $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in F$ pour décrire $F^\perp$ et en déduire $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 29.13

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts dont on note e_1 et e_2 les vecteurs unitaires orthogonaux.

On note s_1 (resp. s_2) la symétrie orthogonale par rapport à H_1 (resp. H_2).

1. Exprimer, pour $x \in E$, $s_1(x)$ et $s_2(x)$ en fonction de x , $\langle x | e_1 \rangle$ et $\langle x | e_2 \rangle$.

2. Soit $x \in E$. Montrer que :

$$(s_1 \circ s_2)(x) = x \iff x \in H_1 \cap H_2.$$

3. Montrer que la somme $H_1^\perp + H_2^\perp$ est directe.

4. Montrer que :

$$\forall x \in H_1^\perp + H_2^\perp, (s_1 \circ s_2)(x) \in H_1^\perp + H_2^\perp.$$

indication

- Utiliser que $p_H + p_{H^\perp} = \text{Id}$ et $s = 2p - \text{Id}$.
- Obtenir $(s_1 \circ s_2)(x) = x - 2\langle s_2(x) | e_1 \rangle e_1 - 2\langle x | e_2 \rangle e_2$ et utiliser la liberté de (e_1, e_2) .
- Montrer que $H_1^\perp \cap H_2^\perp = \{0_E\}$.
- Écrire $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ et utiliser l'expression de $(s_1 \circ s_2)(x)$ précédente.

résultat

- $s_1(x) = x - 2\langle x | e_1 \rangle e_1$ et $s_2(x) = x - 2\langle x | e_2 \rangle e_2$.