

Colle 29

Espaces préhilbertiens réels

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 29.1

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

Exercice 29.2

On se place dans $M_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi : (A, A') \mapsto \text{Tr}(A^\top A')$.

On note $\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 29.3

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique. On définit :

$$F := \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .
2. En déduire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F .
3. Calculer la distance d'un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ à F .

Exercice 29.4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On se place dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, et on considère :

$$G := \text{Vect} \{I_n\}.$$

1. Déterminer $G^\perp$.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Déterminer le projeté orthogonal de A sur $G^\perp$, noté $p_{G^\perp}(A)$.

Exercice 29.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = A^\top = A.$$

Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}.$$

Exercice 29.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer :

$$\lambda_A := \inf \left\{ \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 ; (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

Exercice 29.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left[\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top A X = 0 \right] \iff A \text{ est antisymétrique.}$$

Exercice 29.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n .

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 29.9

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Soit p un projecteur de E .

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal

(ii) $\forall x, y \in E, \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$

(iii) $\forall x \in E, \langle x | p(x) \rangle \geq 0$

(iv) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$

Exercice 29.10

On se place dans $E := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on considère :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : (f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

On note, pour $f \in E$, $\|f\| := \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

2. Montrer que :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} \|f\|.$$

3. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n$ de E .

- (a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les quantités $\|f_n\|$ et $\|f_n\|_\infty$.
- (b) Que dire ?

Exercice 29.11

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ et on considère :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)Q^{(n)}(0)}{(n!)^2}.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer l'orthogonal des ensembles suivants :

$$F_0 := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}.$$

Exercice 29.12 Suites de carré sommable.

On considère :

$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \sum_n |a_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

On définit sur $\ell^2 \times \ell^2$ l'application :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : ((a_n)_n, (b_n)_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n.$$

1. Montrer que $(\ell^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

2. On considère :

$$F := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p, a_n = 0 \right\}.$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2 , différent de ℓ^2 .
- (b) Montrer que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

Exercice 29.13

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts dont on note e_1 et e_2 les vecteurs unitaires orthogonaux.

On note s_1 (resp. s_2) la symétrie orthogonale par rapport à H_1 (resp. H_2).

1. Exprimer, pour $x \in E$, $s_1(x)$ et $s_2(x)$ en fonction de x , $\langle x | e_1 \rangle$ et $\langle x | e_2 \rangle$.

2. Soit $x \in E$. Montrer que :

$$(s_1 \circ s_2)(x) = x \iff x \in H_1 \cap H_2.$$

3. Montrer que la somme $H_1^\perp + H_2^\perp$ est directe.

4. Montrer que :

$$\forall x \in H_1^\perp + H_2^\perp, \quad (s_1 \circ s_2)(x) \in H_1^\perp + H_2^\perp.$$