

Colle 28 • INDICATIONS

Équations différentielles

Exercice 28.1

On considère l'équation différentielle :

$$2x y' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

résultat

1. Les solutions sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Non.

Exercice 28.2

On considère l'équation différentielle :

$$x y' + (x + 1)y = x^2. \quad (\text{E})$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $] -\infty, 0[$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

résultat

1. Les solutions sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 2 + \lambda e^{-x}}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 2 + \mu e^{-x}}{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 2 - 2e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.3

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère l'équation différentielle :

$$x y' - y = x^n. \quad (E_n)$$

1. Résoudre l'équation (E_n) sur $]0, +\infty[$.
2. L'équation (E_n) admet-elle des solutions dérivables sur $[0, +\infty[$?

résultat

1. Les solutions sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda x + \frac{x^n}{n-1}$ pour $n \neq 1$ et $x \mapsto \lambda x + x \ln(x)$ pour $n = 1$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. ♦ Pour $n = 0$, on pose $y(0) = -1$ et, pour $n \geq 2$, on pose $y(0) = 0$.
♦ Pour $n = 1$, les solutions sont prolongeables par continuité en posant $y(0) = 0$, mais aucun de ces prolongements n'est dérivable.

Exercice 28.4

On considère l'équation différentielle :

$$2x y' - 3y = x^2. \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $] -\infty, 0[$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

résultat

1. Les solutions sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} + x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions $x \mapsto \mu(-x)^{\frac{3}{2}} + x^2$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
3. Les fonctions $x \mapsto \begin{cases} \lambda x^{\frac{3}{2}} + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu(-x)^{\frac{3}{2}} + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.5

On considère l'équation différentielle :

$$x y' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

résultat

1.

$$S_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x - \arctan(x)}{x^2} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{\mathbb{R}_-^*} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\mu}{x^2} + \frac{x - \arctan(x)}{x^2} \end{array} ; \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sur $\mathbb{R}$, l'équation admet une unique solution :

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 28.6

On considère l'équation différentielle :

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = \sin(2x).$$

1. Résoudre cette équation sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

résultat

1. Les solutions sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{\lambda}{\cos(x)} - \frac{\cos(2x)}{2\cos(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Seule la fonction $x \longmapsto -\cos(x)$ est solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.7

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 5e^{4x} - 18e^x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 6. \end{cases}$$

indication

Utiliser le principe de superposition : résoudre les équations :

$$y'' - 3y' - 4y = 5e^{4x} \quad \text{et} \quad y'' - 3y' - 4y = -18e^x.$$

résultat

L'unique solution du problème est $x \longmapsto -2e^{-x} + xe^{4x} + 3e^x$.

Exercice 28.8

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + e^{3x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

indication

Utiliser le principe de superposition : résoudre les équations :

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \quad \text{et} \quad y'' + 4y' + 4y = e^{3x}.$$

résultat

L'unique solution du problème est $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25} \right) e^{-2x} + \frac{1}{25} e^{3x}$.

Exercice 28.9

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

résultat

L'unique solution du problème est $x \mapsto -\frac{3}{8} \sin(2x) + \left(1 - \frac{x}{4}\right) \cos(2x)$.

Exercice 28.10

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin(2x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

résultat

L'unique solution du problème est $x \mapsto \frac{2}{15} e^x - \frac{1}{12} e^{-2x} - \frac{\cos(2x) + 3 \sin(2x)}{20}$.

Exercice 28.11

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer une solution de l'équation différentielle :

$$(n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = e^{at}.$$

indication

2. Si $a \neq 1$ et $a \neq \frac{n}{n+1}$: chercher une solution de la forme $t \mapsto Ce^{at}$.

Sinon, chercher une solution de la forme $t \mapsto Cte^{at}$.

résultat

◆ L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^t + \mu e^{\frac{n}{n+1}t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

◆ ◇ Si $a \neq 1$ et $a \neq \frac{n}{n+1}$: $t \mapsto \frac{1}{(n+1)^2 a - (2n+1)a + n} e^{at}$.

◇ Sinon : $t \mapsto -te^{\frac{n}{n+1}t}$.

Exercice 28.12

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cos(nt).$$

indication

2. Si $n = 1$: commencer par chercher une solution de l'équation $y'' + y = e^{it}$ de la forme $t \mapsto C t e^{it}$.

Sinon, chercher une solution de la forme $t \mapsto C \cos(nt)$.

résultat

- ◆ L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- ◆ Si $n = 1$: $t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \frac{t}{2} \sin(t)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

◆ Sinon : $t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \frac{1}{1-n^2} \cos(nt)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 28.13

Soient $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation :

$$at^2 y'' + bt y' + c y = 0.$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par z où $y = z \circ \ln$.

indication

Si z est telle que $y = z \circ \ln$, z vérifie $az'' + (b-a)z' + cz = 0$.

résultat

On note $P := aX^2 + (b-a)X + c$ et $\Delta := (b-a)^2 - 4ac$.

- ◆ Si $\Delta > 0$, en notant $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $P(r_1) = P(r_2) = 0$, on a

$$y(t) = At^{r_1} + Bt^{r_2} \quad ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- ◆ Si $\Delta = 0$, en notant r_0 tel que $P(r_0) = 0$, on a

$$y(t) = (A \ln(t) + B)t^{r_0} \quad ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- ◆ Si $\Delta < 0$, en posant $r_0 := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a} \right)$ et $s := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, on a

$$y(t) = \left(A \cos(s \ln(t)) + B \sin(s \ln(t)) \right) t^{r_0} \quad ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 28.14

Soit I un intervalle. Soient $a, b > 0$.

Déterminer l'ensemble des solutions de :

$$\begin{cases} y > 0 \text{ sur } I \\ y' = (a - by)y. \end{cases}$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par $z := \frac{1}{y}$.

résultat

$$\left\{ t \mapsto \frac{\lambda}{1 + \mu e^{-at}} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 28.15

Soit $a > 0$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + a f(x) = 0.$$

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet une limite nulle en l'infini.

indication

On pose $g := f' + a f$. Il sera utile, pour les deux questions, d'exprimer f :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = f(0)e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x g(t)e^{at} dt.$$

Exercice 28.16

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π -périodique.

On désigne par g une solution de l'équation différentielle :

$$y' + \alpha y = f.$$

1. Montrer que :
$$g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \iff g(2\pi) = g(0).$$
2. En déduire que l'équation différentielle considérée admet une unique solution 2π -périodique.

indication

1. On montrera que les fonctions g et $g(\cdot + 2\pi)$ sont égales en montrant qu'elles vérifient le même problème de Cauchy.
2. Pour l'existence, on commencera par établir la formule générale de la solution g .

Exercice 28.17 Lemme de Gronwall et un exemple d'application.

1. Soient $\psi, y \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)y(s) \, ds.$$

Montrer que :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s) \, ds\right).$$

2. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ strictement croissante. Montrer que toutes les solutions de

$$y'' + q(t)y = 0$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

indication

1. ♦ Définir $F(t) := K + \int_a^t \psi(s)y(s) \, ds$, de sorte que $F'(t) \leq \psi(t)F(t)$.

♦ Définir $\Psi(t) := \int_a^t \psi(s) \, ds$ et $G(t) := F(t)e^{-\Psi(t)}$.

♦ Montrer que $G(\cdot)$ est décroissante.

2. ♦ Si y est solution de l'équation, on a $2y'y'' + 2q(t)yy' = 0$.

♦ Obtenir par intégration par parties :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t)^2 + q(t)y(t)^2 = K + \int_0^t q'(s)y(s)^2 \, ds \quad \text{avec } K = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2.$$

♦ Appliquer la question précédente à la fonction $t \mapsto q(t)y(t)^2$.