

Colle 28

Équations différentielles

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Résolution d'équations différentielles d'ordre 1

Exercice 28.1

On considère l'équation différentielle :

$$2x y' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

Exercice 28.3

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère l'équation différentielle :

$$x y' - y = x^n. \quad (E_n)$$

1. Résoudre l'équation (E_n) sur $]0, +\infty[$.
2. L'équation (E_n) admet-elle des solutions dérivables sur $[0, +\infty[$?

Exercice 28.5

On considère l'équation différentielle :

$$x y' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 28.2

On considère l'équation différentielle :

$$x y' + (x+1)y = x^2. \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $] -\infty, 0[$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 28.4

On considère l'équation différentielle :

$$2x y' - 3y = x^2. \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $] -\infty, 0[$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 28.6

On considère l'équation différentielle :

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = \sin(2x).$$

1. Résoudre cette équation sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

Résolution d'équations différentielles d'ordre 2

Exercice 28.7

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 5e^{4x} - 18e^x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 6. \end{cases}$$

Exercice 28.8

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + e^{3x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 28.9

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Exercice 28.10

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin(2x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 28.11

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer une solution de l'équation différentielle :

$$(n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = e^{at}.$$

Exercice 28.12

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cos(nt).$$

Autres résolutions

Exercice 28.13

Soient $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation :

$$at^2 y'' + bt y' + cy = 0.$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par z où $y = z \circ \ln$.

Exercice 28.14

Soit I un intervalle. Soient $a, b > 0$.

Déterminer l'ensemble des solutions de :

$$\begin{cases} y > 0 \text{ sur } I \\ y' = (a - by)y. \end{cases}$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par $z := \frac{1}{y}$.

Exercices théoriques

Exercice 28.15

Soit $a > 0$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + a f(x) = 0.$$

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet une limite nulle en l'infini.

Exercice 28.16

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π -périodique. On désigne par g une solution de l'équation différentielle :

$$y' + \alpha y = f.$$

1. Montrer que :
$$g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \iff g(2\pi) = g(0).$$
2. En déduire que l'équation différentielle considérée admet une unique solution 2π -périodique.

Exercice 28.17 Lemme de Gronwall et un exemple d'application.

1. Soient $\psi, y \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K + \int_a^t \psi(s) y(s) \, ds.$$

Montrer que :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s) \, ds\right).$$

2. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ strictement croissante. Montrer que toutes les solutions de

$$y'' + q(t)y = 0$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.