

Colle 27 • INDICATIONS

Matrices et applications linéaires

Exercice 27.1

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les deux sous-espaces :

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.
2. On note p le projecteur sur $\mathcal{P}$, parallèlement à $\mathcal{D}$.
Exprimer, pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $p(u)$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

indication

1. Commencer par écrire que $\mathcal{D} = \text{Vect} \{(1, 2, 3)\}$ et $\mathcal{P} = \text{Vect} \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$.
2. Par définition de p , $p(u) \in \mathcal{P}$ et $u - p(u) \in \mathcal{D}$, donc :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : u - p(u) = \alpha(1, 2, 3).$$

On peut ensuite écrire $p(u)$ et utiliser l'équation de $\mathcal{P}$ pour déterminer la valeur de α .

3. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.

résultat

2. $p(x, y, z) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$.
3. La base $((1, 2, 3), (1, -1, 0), (0, 1, -1))$ convient.

Exercice 27.2

On considère l'ensemble :

$$F := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et en donner une base.
2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un automorphisme de F .
3. Déterminer D^{-1} et $(\text{Id}_F - D)^3$.

indication

2. Montrer que $D : F \rightarrow F$ en écrivant par exemple que, si $f(x) = P(x)e^x$ avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $D(f)(x) = (P'(x) + P(x))e^x$, où $P' + P \in \mathbb{R}_2[X]$.
Montrer que D est injective, en remarquant que, si $D(f) = 0$, alors f est constante.
3. Écrire $g(x) = Q(x)e^x$ où $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ et chercher $f \in F$ tel que $D(f) = g$, avec $f(x) = P(x)e^x$, où $P(x) = \dots$, puis identifier coefficient par coefficient (dans la base de F).

résultat

3. ♦ $D^{-1}(x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x) = (x \mapsto (ax^2 + (b - 2a)x + (c - b + 2a))e^x)$
♦ $(\text{Id}_F - D)^3 = 0_{L(F)}$

Exercice 27.3

Soit $n \geq 2$. On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P'. \end{cases}$$

1. Montrer que f est bijectif.
2. Déterminer l'application réciproque f^{-1} .
3. De quelle matrice a-t-on obtenu l'inverse ?

indication

Ce n'est pas précisé par l'énoncé donc il faut le dire : f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

1. Deux méthodes :
♦ Déterminer le noyau de f .
♦ Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ et déterminer son rang.
2. On cherche, pour $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$. Écrire les égalités :

$$P - P' = Q, \quad P' - P'' = Q', \quad \dots, \quad P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)},$$

et les sommer pour obtenir P .

3. Il s'agit de la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

résultat

$$2. f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P' + \dots + P^{(n)}. \end{cases}$$

$$3. \text{ La matrice } M := \text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ & 1 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -n \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ a pour inverse}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1! & 2! & 3! & \cdots & n! \\ & 1 & 2! & 3! & \cdots & n! \\ & & 1! & 2! & \cdots & n! \\ & & & 1 & \cdots & n! \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ (0) & & & & & \frac{n!}{(n-1)!} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 27.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto P(X) - P(X-1). \end{cases}$$

1. Montrer que $u \in L(\mathbb{K}_n[X])$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Calculer $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$.

indication

1. Ne pas oublier de vérifier que $u(\mathbb{K}_n[X]) \subset \mathbb{K}_n[X]$.
2. Utiliser la formule du binôme de Newton.
3. Utiliser la question précédente et le théorème du rang pour le noyau.

résultat

2. $u(1) = 0$ et, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(X^k) = (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j X^j$.
3. $\text{Im}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\text{Ker}(u) = \text{Vect}\{1\}$.

Exercice 27.5

On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $X_0, X_1, X_4 \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}$ tels que :
 $AX_0 = 0_3, \quad AX_1 = X_1 \quad \text{et} \quad AX_4 = 4X_4.$
2. Déterminer $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = A$.

indication

1. Il s'agit de résoudre trois systèmes.
2. En notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A , on peut écrire la matrice de f dans la base (X_0, X_1, X_4) (où les matrices de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ sont indifféremment considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$). On obtient l'existence de $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P \text{Diag}(0, 1, 4) P^{-1}$.

résultat

1. On peut prendre $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. La matrice $\Delta = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 27.6

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

On considère l'endomorphisme :

$$f : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM. \end{cases}$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

indication

1. Résoudre un système d'équations.
2. Utiliser le théorème du rang, et/ou un argument de dimension.
3. Calculer $f(E_{1,1}), \dots, f(E_{2,2})$.
4. Utiliser la somme des dimensions et l'intersection.

résultat

1. $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. Non.
3. $\text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.
4. Oui.

Exercice 27.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.

Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des 0 sur la diagonale.

Indication. On pourra utiliser que, dans un espace vectoriel E , pour $f \in L(E)$,
 $\forall x \in E, (x, f(x))$ est liée $\iff f$ est une homothétie.

indication

Raisonner par récurrence sur n , en distinguant les cas où f est une homothétie et f ne l'est pas.

Exercice 27.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Calculer les puissances de $I_n + A$.
2. (a) Déterminer une condition sur A pour que $I_n + A$ soit inversible.
(b) Déterminer dans ce cas son inverse.

indication

Utiliser (et savoir démontrer) que, puisque $\text{rg}(A) = 1$, $A^2 = \text{Tr}(A)A$.

1. Utiliser le binôme de Newton et (par récurrence) $A^k = \text{Tr}(A)^{k-1}A$ si $k \geq 1$.
2. ♦ Puisque $A^2 = \text{Tr}(A)A$, les puissances de A sont dans $\text{Vect}\{I_n, A\}$, les puissances de $I_n + A$ aussi. Si $I_n + A$ est inversible, l'application

$$\varphi : \begin{cases} \text{Vect}\{I_n, A\} & \longrightarrow & \text{Vect}\{I_n, A\} \\ M & \longmapsto & (I_n + A)M \end{cases}$$

est bijective (endomorphisme injectif en dimension finie). Ainsi, $(I_n + A)^{-1} = \varphi^{-1}(I_n) \in \text{Vect}\{I_n, A\}$, i.e. il existe $\lambda, \nu \in \mathbb{K}$ tels que $(I_n + A)^{-1} = \lambda I_n + \nu A$.

- ♦ En développant $I_n = (I_n + A)(\lambda I_n + \nu A)$ et en utilisant la relation $A^2 = \text{Tr}(A)A$, puis en identifiant dans la base (I_n, A) , on obtient :

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda + \nu + \nu \text{Tr}(A) = 0.$$

- ♦ Distinguer les cas où $\text{Tr}(A) \neq -1$ et $\text{Tr}(A) = -1$.
♦ Dans ce deuxième cas, la relation $A^2 = -A$ donne $(I_n + A)A = 0$, ce qui donne l'existence d'un vecteur dans le noyau de $I_n + A$.

résultat

1. $(I_n + A)^0 = I_n$ et, pour $p \geq 1$, $(I_n + A)^p = \begin{cases} I_n + \frac{(1 + \text{Tr}(A))^p - 1}{\text{Tr}(A)} A & \text{si } \text{Tr}(A) \neq 0 \\ I_n + pA & \text{si } \text{Tr}(A) = 0. \end{cases}$
2. Si $\text{Tr}(A) \neq -1$, $(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)} A$.

Exercice 27.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}(MM^T)$.

indication

- ♦ On va montrer que $\text{rg}(M^T) = \text{rg}(MM^T)$ (le résultat découlera du fait que $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^T)$).
♦ Appliquer le théorème du rang à M^T et MM^T .
♦ Montrer que $\text{Ker}(M^T) = \text{Ker}(MM^T)$.
☐ Sans difficulté.
☐ Plus difficile, on pourra remarquer que $\text{Tr}(B^T B) = 0 \implies B = 0$.

Exercice 27.10

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $u \in L(E)$ de rang r .

Montrer que u peut s'écrire comme la somme de r endomorphismes de rang 1.

indication

Utiliser que toute matrice de rang r est équivalente à J_r .

Exercice 27.11

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in L(E)$ tel que :

$$u^n = 0_{L(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{L(E)}.$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u .

indication

1. Se donner un vecteur $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et montrer que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
2. On note A la matrice précédente. Soit B telle que $AB = BA$. Exploiter l'égalité $AB = BA$ coefficient par coefficient pour montrer que le commutant de A est $\text{Vect}\{A^k\}_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$.

Exercice 27.12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{Tr}(AM).$$

2. Soit $n \geq 2$. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

indication

1. Raisonner à l'aide d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Autre possibilité : en décomposant $M = \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$, on peut poser $A = (\varphi(E_{j,i}))_{i,j}$.
2. ♦ Un hyperplan étant le noyau d'une forme linéaire non nulle, on la fixe et on utilise la question précédente pour fixer $A \in M_n(\mathbb{K})$.
♦ On utilise que A est équivalente à J_r où $r := \text{rg}(A)$.
♦ On pose une matrice de trace nulle inversible judicieusement choisie, et on utilise les propriétés de Tr .