

Colle 26 • INDICATIONS

Dimension finie

Exercice 26.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- (ii) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (iii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

indication

- ♦ (i) $\implies$ (ii) et (ii) $\implies$ (iii) : montrer une inclusion et l'égalité des dimensions par le théorème du rang.
- ♦ (iii) $\implies$ (i) : pour $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ donc $u(x) = u^2(z)$, et écrire :

$$x = x - u(z) + u(z),$$

pour montrer que $E = \text{Ker}(u) + \text{Im}(u)$.

Exercice 26.2

On considère l'ensemble :

$$F := \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer la dimension de F .
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[X]$.

indication

1. On peut le vérifier directement, tout comme on peut montrer qu'il s'agit d'une intersection de deux hyperplans.
2. On écrit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_4X^4$.
En supposant $P \in F$, on égalise à 0 et on obtient $a_0 = 0$ et $a_1 = -(a_4 + a_3 + a_2)$.
On en déduit que $P \in \text{Vect}(X^4 - X, X^3 - X, X^2 - X)$.
On vérifie ensuite que la famille $(X^4 - X, X^3 - X, X^2 - X)$ est libre.
3. On cherche un espace de dimension 2. On peut partir d'une base de $\mathbb{C}_4[X]$ adaptée à F .

résultat

3. L'espace $\text{Vect}(1, X)$ convient.

Exercice 26.3 Noyaux et images itérés, cœur et nilspace.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(E)$.

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k).$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$.

On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

3. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^{p+k}) = \text{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{p+k}) = \text{Im}(u^p).$$

4. Montrer que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\text{Im}(u^p)$ et $\text{Ker}(u^p)$ s'appellent respectivement « cœur » et « nilspace » de u .

indication

1. Essentiellement, $u^{k+1}(\dots) = u^k(u(\dots))$.
2. Raisonner avec la suite $(\dim(\text{Ker}(u^k)))_{k \in \mathbb{N}}$.
3. ♦ L'égalité des noyaux peut se démontrer par récurrence.
♦ L'égalité des images peut se démontrer à l'aide d'une inclusion et de l'égalité des dimensions, obtenue par le théorème du rang.
4. Utiliser les dimensions et montrer que l'intersection est nulle.

Exercice 26.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g \in L(E)$.

Montrer que :

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

indication

- ♦ Pour l'inégalité de droite, commencer par montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ pour majorer par $\text{rg}(g)$. Ensuite, majorer $\text{rg}(g \circ f)$ par $\text{rg}(f)$ en utilisant l'application $g|_{\text{Im}(f)}$.
- ♦ Appliquer le théorème du rang à $g|_{\text{Im}(f)}$ et utiliser que $\text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) \subset \text{Ker}(g)$.

Exercice 26.5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On définit, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme

$$P_k := X^k(1 - X)^{n-k}.$$

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

indication

1. La famille étant de taille $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, il suffit de montrer que la famille est libre.
En écrivant $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, on évalue en 0 puis on peut simplifier par X , et en

recommence.

2. Terrible astuce : $X^k = X^k(X + (1 - X))^{n-k}$, puis on applique la formule du binôme de Newton.

résultat

$$2. X^k = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} P_{k+j}.$$

Exercice 26.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts.

On définit $A := \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ et :

$$C(A) := \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA \right\}.$$

Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $C(A)$.

indication

On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.

- ◆ L'égalité $AM = MA$ permet de justifier que $C(A) = D_n(\mathbb{K})$, donc $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension n .
- ◆ Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $A^k \in C(A)$.
- ◆ Il reste à montrer que la famille est libre. En écrivant :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0_n,$$

on obtient :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \lambda_0 + \lambda_1 a_k + \dots + \lambda_{n-1} a_k^{n-1} = 0.$$

On peut considérer le polynôme $P := \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$.

Exercice 26.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists n_x \in \mathbb{N} : f^{n_x}(x) = 0_E.$$

1. Montrer que f est nilpotent.
2. Le résultat subsiste-t-il si E n'est plus supposé de dimension finie ?

indication

1. Utiliser $n \max(n_{e_1}, \dots, n_{e_p})$, où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E .
2. On peut, par exemple, se placer dans $E = \mathbb{R}[X]$ avec $f : P \mapsto P'$.

Exercice 26.8

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in L(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ et $f^n = 0_{L(E)}$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

2. Soit $g \in L(E)$. Montrer que :

$$g \circ f = f \circ g \iff g \in \text{Vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1}).$$

indication

1. On peut écrire une relation de liaison, raisonner par l'absurde et fixer p tel que $\lambda_p \neq 0$, puis composer par f^{n-1-p} .

2. À x fixé, $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$. Pour prouver que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$, il suffit de prouver que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad g(f^k(x)) = a_0 f^k(x) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(f^k(x)).$$

Exercice 26.9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que :

$$\exists f \in L(E) : \text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff \dim(E) \text{ est paire.}$$

indication

$\Rightarrow$ Utiliser le théorème du rang.

$\Leftarrow$ En se donnant $(e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E , construire les $f(e_i)$, en distinguant par exemple les $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $i \in \llbracket p+1, 2p \rrbracket$.

Exercice 26.10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{Tr}(AM).$$

2. Soit $n \geq 2$. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

indication

1. Raisonner à l'aide d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Autre possibilité : en décomposant $M = \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$, on peut poser $A = (\lambda_{i,j})_{i,j}$ où $\lambda_{i,j} = \varphi(E_{j,i})$.

2. ♦ Un hyperplan étant le noyau d'une forme linéaire non nulle, on la fixe et on utilise la question précédente pour fixer $A \in M_n(\mathbb{K})$.

♦ On utilise que A est équivalente à J_r où $r := \text{rg}(A)$.

♦ On pose une matrice de trace nulle inversible judicieusement choisie, et on utilise les propriétés

de Tr.

Exercice 26.11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

indication

- ♦ On commence par montrer que $f \in L(E)$ est une homothétie si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \quad (x, f(x)) \text{ est liée.}$$

- ♦ On pourra penser, étant donné un vecteur x non nul, à la projection sur la droite $\text{Vect}\{x\}$.

résultat

Il s'agit des homothéties.