

Colle 26

Dimension finie

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 26.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in L(E)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- (ii) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (iii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

Exercice 26.2

On considère l'ensemble :

$$F := \left\{ P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(0) = P(1) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer la dimension de F .
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[X]$.

Exercice 26.3 Noyaux et images itérés, cœur et nilspace.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(E)$.

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k).$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$.

On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

3. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^{p+k}) = \text{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{p+k}) = \text{Im}(u^p).$$

4. Montrer que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\text{Im}(u^p)$ et $\text{Ker}(u^p)$ s'appellent respectivement « cœur » et « nilspace » de u .

Exercice 26.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g \in L(E)$.

Montrer que :

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

Exercice 26.5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On définit, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme

$$P_k := X^k(1 - X)^{n-k}.$$

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 26.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts.

On définit $A := \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ et :

$$C(A) := \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA \right\}.$$

Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $C(A)$.

Exercice 26.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in L(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists n_x \in \mathbb{N} : f^{n_x}(x) = 0_E.$$

1. Montrer que f est nilpotent.
2. Le résultat subsiste-t-il si E n'est plus supposé de dimension finie ?

Exercice 26.8

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in L(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ et $f^n = 0_{L(E)}$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
2. Soit $g \in L(E)$. Montrer que :

$$g \circ f = f \circ g \iff g \in \text{Vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1}).$$

Exercice 26.9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que :

$$\exists f \in L(E) : \text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff \dim(E) \text{ est paire.}$$

Exercice 26.10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{Tr}(AM).$$

2. Soit $n \geq 2$. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$.
Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

Exercice 26.11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.