

Colle 25 • INDICATIONS

Séries

Exercice 25.1

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

indication

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 25.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum_n \ln(u_n)$ converge.

Lesquelles des séries ci-dessous convergent ?

$$\sum_n u_n ; \quad \sum_n e^{-n u_n} ; \quad \sum_n \frac{u_n}{2^n} ; \quad \sum_n (u_{n+1} - u_n).$$

indication

- Utiliser une condition nécessaire de convergence.
- Majorer à partir d'un certain rang le terme général et conclure par comparaison.
- Déterminer un équivalent.
- C'est une série télescopique : on connaît sa nature lorsque l'on connaît la nature de la suite associée.

Exercice 25.3

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n}$.

indication

- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
- ◆ Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n}$ diverge.

Exercice 25.4

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$.

indication

- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
- ◆ Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n}$ converge.

Exercice 25.5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt \sim \frac{f(0)}{n}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt$.

indication

1. On utilise l'inégalité triangulaire intégrale et le fait que $t^n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ lorsque $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ pour montrer que :

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt - \frac{f(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \sup_{t \in [0, \frac{1}{n}]} |f(t) - f(0)|,$$

où $\sup_{t \in [0, \frac{1}{n}]} |f(t) - f(0)| \rightarrow 0$ par continuité.

2. On utilise les équivalents.

résultat

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt \text{ converge} \iff \alpha > 0.$$

Exercice 25.6

Justifier l'existence et calculer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

indication

Procéder par comparaison série-intégrale pour établir une formule du type :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{N+1} \frac{a}{a^2 + x^2} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{a^2 + n^2} \leq \int_0^N \frac{a}{a^2 + x^2} dx.$$

résultat

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 25.7

Soit $a > 0$. Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}},$$

en fonction des valeurs de a .

indication

- ♦ Écrire $a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$ sous forme exponentielle.
- ♦ Utiliser (et savoir démontrer) que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ (avec $\gamma \geq 0$).

résultat

$$\sum_{n \geq 1} a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \text{ converge} \iff a < \frac{1}{e}.$$

Exercice 25.8

Déterminer la nature des séries :

$$\sum_n \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) \quad \text{et} \quad \sum_n \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n).$$

indication

- ◆ Pour $\sum_n \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$, utiliser un équivalent.
- ◆ Pour $\sum_n \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$, commencer par calculer $\sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) + \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

résultat

Les deux séries convergent.

Exercice 25.9

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

indication

- ◆ L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n!} = e^{tz}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
- ◆ Utiliser les racines p -ièmes de l'unité.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \exp(\omega^k) \quad \text{avec} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Exercice 25.10

Soit $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} \cos(u_{n-1}). \end{cases}$$

Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

indication

Montrer que $u_n \rightarrow 0$, puis montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 25.11

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

indication

- ◆ L'existence peut s'obtenir par les résultats sur les séries alternées.
- ◆ Pour le calcul de la somme, il s'agit de calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis de les soustraire.

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Exercice 25.12

Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n n x^n$ converge, et calculer sa somme.

indication

On peut dériver l'identité « $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ », puis passer à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 25.13

Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

indication

Commencer par écrire que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1},$$

puis utiliser le critère des séries alternées pour la première expression.

résultat

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

Exercice 25.14

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

Exercice 25.15

Soit $\alpha > 1$.

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

résultat

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 25.16

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ .

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k := \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{k} \right) dt$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := H_n - \ln(n) - \gamma$.

(a) Soit $n \geq 2$. Déterminer une expression de v_n faisant apparaître les a_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a ainsi établi que $H_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

indication

1. En posant $u_n := H_n - \ln(n)$, montrer que $(u_n)_n$ est bornée et monotone, en exploitant une comparaison série intégrale.
2. (a) Utiliser que $H_n = \frac{1}{n} + H_{n-1}$, $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ et $\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{t} dt$.
(b) Montrer que $0 \leq a_k \leq \frac{1}{k(k+1)}$ puis que $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}$.

résultat

2. (a) $v_n = \frac{1}{n} - \sum_{k=n}^{+\infty} a_k.$

Exercice 25.17

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\sum_n a_n$ converge.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $R_n := \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k a_k = -n R_{n+1} + \sum_{k=1}^n R_k.$$

2. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k \rightarrow 0$.

indication

1. On écrit $a_k = R_k - R_{k+1}$ pour séparer la somme en deux.
Pour le deuxième terme, la somme $\sum_{k=1}^r k R_{k+1}$, on utilise que $k = (k+1) - 1$.
De la sorte, la somme contient une partie télescopique, et le deuxième terme désiré.
2. Diviser l'égalité précédente par n , puis utiliser (démontrer) le théorème de Cesàro pour montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R_{k+1} \rightarrow 0$.

Exercice 25.18 Suite décroissante sommable.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n u_n \leq 2 \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n u_k.$$

(b) En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \frac{1}{1 + n^2 u_n}$.

Montrer que :

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ diverge.}$$

indication

1. (a) Distinguer deux cas suivant la parité de n et minorer $\sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n u_k$ par le plus petit terme (utiliser la décroissance de $(u_n)_n$) que l'on multiplie par le nombre de termes.
(b) Par encadrement en utilisant la question précédente.
2. Raisonner par contraposée et montrer que $\frac{1}{n} = o(v_n)$.