

Colle 25

Séries

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 25.1

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum_n \ln(u_n)$ converge.

Lesquelles des séries ci-dessous convergent ?

$$\sum_n u_n ; \quad \sum_n e^{-n u_n} ; \quad \sum_n \frac{u_n}{2^n} ; \quad \sum_n (u_{n+1} - u_n).$$

Exercice 25.3

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n}$.

Exercice 25.4

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$.

Exercice 25.5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt \sim \frac{f(0)}{n}$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt$.

Exercice 25.6

Justifier l'existence et calculer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

Exercice 25.7

Soit $a > 0$. Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}},$$

en fonction des valeurs de a .

Exercice 25.8

Déterminer la nature des séries :

$$\sum_n \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) \quad \text{et} \quad \sum_n \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n).$$

Exercice 25.9

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.10

Soit $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} \cos(u_{n-1}). \end{cases}$$

Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 25.11

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 25.12

Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n n x^n$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 25.13

Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Exercice 25.14

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Exercice 25.15

Soit $\alpha > 1$.

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 25.16

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ .

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k := \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := H_n - \ln(n) - \gamma$.

(a) Soit $n \geq 2$. Déterminer une expression de v_n faisant apparaître les a_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a ainsi établi que $H_n = \ln(n) + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 25.17

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\sum_n a_n$ converge.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $R_n := \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k a_k = -n R_{n+1} + \sum_{k=1}^n R_k.$$

2. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k \rightarrow 0$.

Exercice 25.18 Suite décroissante sommable.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n u_n \leq 2 \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n u_k.$$

(b) En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \frac{1}{1 + n^2 u_n}$.

Montrer que :

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ diverge}.$$