

Colle 30 • INDICATIONS

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 30.1

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

indication

1. ♦ Montrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$.
♦ Utiliser ensuite la dimension finie pour conclure.
2. (a) Procéder par double inclusion.
(b) Appliquer la question précédente à $F^\perp$ et $G^\perp$, puis appliquer deux fois la première question.

Exercice 30.2

On considère dans $\mathbb{R}^3$ euclidien le plan :

$$\mathcal{P} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale $p_{\mathcal{P}}$ sur le plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale $s_{\mathcal{P}}$ admettant $\mathcal{P}$ pour plan invariant.

indication

1. Projeter sur $\mathcal{P}^\perp = \text{Vect} \{(1, 1, 1)\}$ et utiliser $p_{\mathcal{P}} + p_{\mathcal{P}^\perp} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
2. Utiliser que $s_{\mathcal{P}} = 2p_{\mathcal{P}} - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

résultat

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^3)}(p_{\mathcal{P}}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^3)}(s_{\mathcal{P}}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 30.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = A^T = A.$$

Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}.$$

indication

- ◆ Puisque A est la matrice d'un projecteur, $\text{Tr}(A) = \text{rg}(A)$.
- ◆ Utiliser ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, avec la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et la matrice $(|a_{i,j}|)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 30.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n .

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E .

indication

- *A priori*, $n \neq p$ donc il s'agit de montrer la liberté et le caractère générateur de la famille considérée.
- CARACTÈRE LIBRE. On montre que la famille est orthonormale. On peut calculer, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\|e_j\|^2$.
- CARACTÈRE GÉNÉRATEUR. On montre que $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. On peut montrer que

$$\forall x \in E, \quad p_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)}(x) = x$$

en montrant que $\|x - p_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)}(x)\| = 0$.

Exercice 30.5

Calculer :

$$m := \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt.$$

indication

Travailler dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt,$$

pour comprendre que :

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (aX + b)\|^2 = \left(d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) \right)^2.$$

Déterminer a, b de sorte que :

$$X^2 - (aX + b) \in \mathbb{R}_1[X]^\perp.$$

résultat

$$m = \left\| X^2 - X + \frac{1}{6} \right\|^2 = \frac{1}{180}.$$

Exercice 30.6

On se place dans $E := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on considère :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : (f, g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

On note, pour $f \in E$, $\|f\| := \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

2. Montrer que :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} \|f\|.$$

3. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \longmapsto t^n$ de E .

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les quantités $\|f_n\|$ et $\|f_n\|_\infty$.

(b) Que dire ?

indication

1. ♦ Ne pas oublier de vérifier que la quantité définissant $\langle f | g \rangle$ existe bien.

♦ Pour le caractère « défini positif », montrer que la fonction intégrée est constante puis qu'elle est nulle.

2. ♦ Utiliser le théorème fondamental de l'analyse : $\forall x \in [0, 1], f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$.

♦ Montrer et utiliser : $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

♦ Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $\int_0^x f'(t) dt$.

3. (b) Calculer $\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty}$ et faire tendre $n \rightarrow +\infty$.

résultat

3. (a) $\|f_n\| = \frac{n^2}{2n-1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.

(b) Il n'existe pas de constante C telle que $\|\cdot\| \leq C \|\cdot\|_\infty$.

En deuxième année, on dit que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 30.7

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ et on considère :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)Q^{(n)}(0)}{(n!)^2}.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer l'orthogonal des ensembles suivants :

$$F_0 := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}.$$

indication

1. ♦ Ne pas oublier de vérifier que la quantité définissant $\varphi(P, Q)$ existe bien.
♦ Pour le caractère « défini positif », utiliser la caractérisation de la multiplicité des racines par les dérivées successives ou la formule de Taylor polynomiale.
2. Écrire F_0 et F_1 comme des sous-espaces vectoriels engendrés (i.e. « comme des Vect $\{\dots\}$ »), et utiliser la formule de Taylor polynomiale.

résultat

2. ♦ $F_0 = \text{Vect} \{X^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $F_0^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.
♦ $F_1 = \text{Vect} \{X^n - 1\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $F_1^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Exercice 30.8 Représentation de Riesz et contre-exemple.

1. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Montrer que, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a | x \rangle.$$

2. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

- (a) Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]^* \\ P & \longmapsto & \langle P | \cdot \rangle \end{cases}$ est linéaire et injective.
- (b) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n := (X - 1)^n$. Déterminer $\|P_n\|^2$.
- (c) En déduire que $(Q \mapsto Q(0)) \notin \text{Im}(\varphi)$.

indication

1. Raisonner avec un isomorphisme entre E et E^* .
2. (a) Utiliser la bilinéarité du produit scalaire et le caractère défini positif.
(b)
(c) Raisonner par l'absurde et utiliser la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.