

Colle 30

Espaces préhilbertiens réels

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 30.1

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 30.2

On considère dans $\mathbb{R}^3$ euclidien le plan :

$$\mathcal{P} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale $p_{\mathcal{P}}$ sur le plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale $s_{\mathcal{P}}$ admettant $\mathcal{P}$ pour plan invariant.

Exercice 30.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = A^\top = A.$$

Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}.$$

Exercice 30.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n .

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 30.5

Calculer :

$$m := \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt.$$

Exercice 30.6

On se place dans $E := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on considère :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : (f, g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

On note, pour $f \in E$, $\|f\| := \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

2. Montrer que :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} \|f\|.$$

3. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \longmapsto t^n$ de E .

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les quantités $\|f_n\|$ et $\|f_n\|_\infty$.

(b) Que dire ?

Exercice 30.7

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ et on considère :

$$\varphi : (P, Q) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)Q^{(n)}(0)}{(n!)^2}.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer l'orthogonal des ensembles suivants :

$$F_0 := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}.$$

Exercice 30.8 Représentation de Riesz et contre-exemple.

1. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Montrer que, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a | x \rangle.$$

2. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle : (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

(a) Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]^* \\ P & \longmapsto & \langle P | \cdot \rangle \end{cases}$ est linéaire et injective.

(b) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n := (X - 1)^n$. Déterminer $\|P_n\|^2$.

(c) En déduire que $(Q \mapsto Q(0)) \notin \text{Im}(\varphi)$.