

Colle 29 • INDICATIONS

Variables aléatoires

Exercice 29.1

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathcal{B}(p_n).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - m_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

indication

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 29.2 Loi géométrique tronquée.

Un pièce tombe sur PILE avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance la pièce n fois. On définit X la variable aléatoire par :

- ♦ $X = 0$ si la pièce ne tombe jamais sur PILE ;
- ♦ $X = k$ ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) lorsque la pièce tombe sur PILE pour la première fois au k -ième lancer.

Déterminer la loi de X et son espérance.

indication

- ♦ Modéliser chaque lancer par une variable aléatoire X_i à valeurs dans $\{0, 1\}$ et écrire l'évènement $(X = k)$ comme une intersection de $(X_i = \dots)$.

- ♦ Il s'agit de calculer une somme du type $\sum_{k=1}^n k x^{k-1}$.

On peut raisonner avec des polynômes / fractions rationnelles ou des fonctions polynomiales et des sommes géométriques.

résultat

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^n \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n(1 - p)^{n+1} - (n + 1)(1 - p)^n + 1}{p}.$$

Exercice 29.3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance et une variance.
On suppose que :

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n] = c \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}[X_n] = 0.$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0.$$

indication

♦ Utiliser l'inégalité triangulaire pour étudier séparément :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geq \varepsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{E}[X_n] - c| \geq \varepsilon).$$

♦ Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geq \varepsilon)$.

Exercice 29.4

On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $1/6$ d'au plus $1/100$.

indication

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec X et $\varepsilon \leftarrow \varepsilon n$, ou avec $Y := \frac{X}{n}$ pour montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

résultat

$$n \geq 27778.$$

Exercice 29.5

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leq n$. On considère $X, Y \sim \mathcal{U}([1, n])$ indépendantes. On pose :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leq m \\ Y(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z et son espérance.
2. Déterminer m maximisant $\mathbb{E}[Z]$.

indication

1. Écrire $Z = k$ comme union disjointe de deux événements, à l'aide de la définition de $Z(\omega)$.
2. $\mathbb{E}[Z]$ est un polynôme de degré 2 en m . On peut donc chercher son maximum.

résultat

1. $Z(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Z = k) = \begin{cases} \frac{m}{n^2} & \text{si } k \leq m \\ \frac{m}{n^2} + \frac{1}{n} & \text{si } k > m. \end{cases}$
2. $\mathbb{E}[Z] = \frac{-m^2 + mn + (n+1)n}{2n}$ et $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Exercice 29.6 Inégalité de Cantelli.

Soit X une variable aléatoire admettant une variance σ^2 finie.
Montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\right) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

indication

◆ Commencer par établir que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq a) \leq \frac{t^2 + \sigma^2}{(a + t)^2}.$$

Pour cela, on pourra s'inspirer de la preuve de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en utilisant la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}[X] + t$.

◆ En optimisant en t , en déduire que :

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

◆ Appliquer l'inégalité précédente à $-X$ également.

Exercice 29.7

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$.

1. Préciser les lois des variables X et Y .
2. Calculer la covariance des variables X et Y . Celles-ci sont-elles indépendantes ?
3. Les variables $U := X + Y$ et $V := X - Y$ sont-elles indépendantes ?

résultat

1. X et Y suivent la même loi, avec $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4}$.
2. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.
3. U et V suivent une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et sont indépendantes.

Exercice 29.8

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$.

On considère n cartes numérotées de 1 à n . Un joueur découvre les cartes les unes après les autres. On note X la valeur maximale obtenue sur les k premières cartes.

1. Déterminer la loi de X .
2. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq q$. Montrer que :

$$\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

indication

1. Le protocole expérimental est équivalent à prendre k cartes simultanément puis à considérer la valeur maximale sur ces k numéros tirés.
2. Utiliser que $1 = \sum_{\ell=k}^n \mathbb{P}(X = \ell)$ et multiplier par $\binom{n}{k}$.

résultat

$$1. X(\Omega) = [1, n] \quad \text{et} \quad \forall \ell \in [1, n], \quad \mathbb{P}(X = \ell) = \frac{\binom{\ell-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}.$$

$$3. \mathbb{E}[X] = \frac{k}{k+1} (n+1).$$

Exercice 29.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$.

Montrer que :

$$\forall m \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\mathbb{E}[X] - m + 1}{n} \leq \mathbb{P}(X \geq m) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{m}.$$

indication

- ♦ Utiliser Markov pour une inégalité.
- ♦ Pour l'autre inégalité, écrire

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{m-1} k \mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=m}^n k \mathbb{P}(X = k),$$

et majorer chacune des sommes.