

Colle 29

Variables aléatoires

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 29.1

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathcal{B}(p_n).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - m_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Exercice 29.2 Loi géométrique tronquée.

Un pièce tombe sur PILE avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance la pièce n fois. On définit X la variable aléatoire par :

- ♦ $X = 0$ si la pièce ne tombe jamais sur PILE ;
- ♦ $X = k$ ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) lorsque la pièce tombe sur PILE pour la première fois au k -ième lancer.

Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 29.3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance et une variance.

On suppose que :

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n] = c \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}[X_n] = 0.$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0.$$

Exercice 29.4

On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

Exercice 29.5

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leq n$. On considère $X, Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ indépendantes. On pose :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leq m \\ Y(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z et son espérance.
2. Déterminer m maximisant $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 29.6 Inégalité de Cantelli.

Soit X une variable aléatoire admettant une variance σ^2 finie.
Montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\right) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Exercice 29.7

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$.

1. Préciser les lois des variables X et Y .
2. Calculer la covariance des variables X et Y . Celles-ci sont-elles indépendantes ?
3. Les variables $U := X + Y$ et $V := X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 29.8

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$.

On considère n cartes numérotées de 1 à n . Un joueur découvre les cartes les unes après les autres. On note X la valeur maximale obtenue sur les k premières cartes.

1. Déterminer la loi de X .
2. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq q$. Montrer que :

$$\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 29.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$.
Montrer que :

$$\forall m \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\mathbb{E}[X] - m + 1}{n} \leq \mathbb{P}(X \geq m) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{m}.$$