

Colle 28

Représentation matricielle des applications linéaires

- ▶ Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 28.1

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les deux sous-espaces :

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.
2. On note p le projecteur sur $\mathcal{P}$, parallèlement à $\mathcal{D}$.
Exprimer, pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $p(u)$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 28.2

On considère l'ensemble :

$$F := \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et en donner une base.
2. Montrer que l'application $D : f \longmapsto f'$ est un automorphisme de F .
3. Déterminer D^{-1} et $(\text{Id}_F - D)^3$.

Exercice 28.3

Soit $n \geq 2$. On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P'. \end{cases}$$

1. Montrer que f est bijectif.
2. Déterminer l'application réciproque f^{-1} .
3. De quelle matrice a-t-on obtenu l'inverse ?

Exercice 28.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X) - P(X-1). \end{cases}$$

1. Montrer que $u \in L(\mathbb{K}_n[X])$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Calculer $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$.

Exercice 28.5

On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $X_0, X_1, X_4 \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}$ tels que :
 $AX_0 = 0_3, \quad AX_1 = X_1 \quad \text{et} \quad AX_4 = 4X_4.$
2. Déterminer $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = A$.

Exercice 28.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.

Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des 0 sur la diagonale.

Indication. On pourra utiliser que, dans un espace vectoriel E , pour $f \in L(E)$,

$$\forall x \in E, (x, f(x)) \text{ est liée} \iff f \text{ est une homothétie.}$$

Exercice 28.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Calculer les puissances de $I_n + A$.
2. (a) Déterminer une condition sur A pour que $I_n + A$ soit inversible.
(b) Déterminer dans ce cas son inverse.

Exercice 28.11

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in L(E)$ tel que :

$$u^n = 0_{L(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{L(E)}.$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u .

Exercice 28.6

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

On considère l'endomorphisme :

$$f : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM. \end{cases}$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

Exercice 28.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}(MM^T)$.

Exercice 28.10

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $u \in L(E)$ de rang r .

Montrer que u peut s'écrire comme la somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 28.12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{Tr}(AM).$$

2. Soit $n \geq 2$. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.