

Colle 27 • INDICATIONS

Équations différentielles

Exercice 27.1

Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation :

$$y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1.$$

résultat

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{1}{2x} + \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2) \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 27.2

Soit $k \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - y = x^k e^x.$$

résultat

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \lambda \right) e^x \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 27.3

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+t^2)y' = 2ty + 5(1+t^2) \\ y(1) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

résultat

$$t \longmapsto \frac{\pi}{5}(t^2 + 1) + 5 \arctan(t)(t^2 + 1).$$

Exercice 27.4

On considère l'équation différentielle :

$$x y' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

résultat

1.

$$S_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x - \arctan(x)}{x^2} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{\mathbb{R}_-^*} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\mu}{x^2} + \frac{x - \arctan(x)}{x^2} \end{array} ; \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sur $\mathbb{R}$, l'équation admet une unique solution :

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 27.5

Soient $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation :

$$at^2 y'' + bt y' + c y = 0.$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par z où $y = z \circ \ln$.

indication

Si z est telle que $y = z \circ \ln$, z vérifie $az'' + (b-a)z' + cz = 0$.

résultat

On note $P := aX^2 + (b-a)X + c$ et $\Delta := (b-a)^2 - 4ac$.

♦ Si $\Delta > 0$, en notant $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $P(r_1) = P(r_2) = 0$, on a

$$y(t) = At^{r_1} + Bt^{r_2} ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

♦ Si $\Delta = 0$, en notant r_0 tel que $P(r_0) = 0$, on a

$$y(t) = (A \ln(t) + B)t^{r_0} ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

♦ Si $\Delta < 0$, en posant $r_0 := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ et $s := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, on a

$$y(t) = \left(A \cos(s \ln(t)) + B \sin(s \ln(t)) \right) t^{r_0} ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 27.6

Soit I un intervalle. Soient $a, b > 0$.

Déterminer l'ensemble des solutions de :

$$\begin{cases} y > 0 \text{ sur } I \\ y' = (a - by)y. \end{cases}$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par $z := \frac{1}{y}$.

résultat

$$\left\{ t \mapsto \frac{\lambda}{1 + \mu e^{-at}} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 27.7

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + a f(x) = 0$$

où $a > 0$ est fixé.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet une limite nulle en l'infini.

indication

On pose $g := f' + a f$. Il sera utile, pour les deux questions, d'exprimer f :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = f(0)e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x g(t)e^{at} dt.$$

Exercice 27.8

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π -périodique.

On désigne par g une solution de l'équation différentielle :

$$y' + \alpha y = f.$$

1. Montrer que :
$$g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \iff g(2\pi) = g(0).$$
2. En déduire que l'équation différentielle considérée admet une unique solution 2π -périodique.

indication

1. On montrera que les fonctions g et $g(\cdot + 2\pi)$ sont égales en montrant qu'elles vérifient le même problème de Cauchy.
2. Pour l'existence, on commencera par établir la formule générale de la solution g .

Exercice 27.9 Lemme de Gronwall et un exemple d'application.

1. Soient $\psi, y \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)y(s) \, ds.$$

Montrer que :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s) \, ds\right).$$

2. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ strictement croissante. Montrer que toutes les solutions de

$$y'' + q(t)y = 0$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

indication

1. ♦ Définir $F(t) := K + \int_a^t \psi(s)y(s) \, ds$, de sorte que $F'(t) \leq \psi(t)F(t)$.

♦ Définir $\Psi(t) := \int_a^t \psi(s) \, ds$ et $G(t) := F(t)e^{-\Psi(t)}$.

♦ Montrer que $G(\cdot)$ est décroissante.

2. ♦ Si y est solution de l'équation, on a $2y'y'' + 2q(t)yy' = 0$.

♦ Obtenir par intégration par parties :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t)^2 + q(t)y(t)^2 = K + \int_0^t q'(s)y(s)^2 \, ds \quad \text{avec } K = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2.$$

♦ Appliquer la question précédente à la fonction $t \mapsto q(t)y(t)^2$.