

Colle 27

Équations différentielles

- ▶ Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Résolution d'équations différentielles

Exercice 27.1

Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation :

$$y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1.$$

Exercice 27.3

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+t^2)y' = 2ty + 5(1+t^2) \\ y(1) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exercice 27.5

Soient $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation :

$$at^2 y'' + bt y' + c y = 0.$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par z où $y = z \circ \ln$.

Exercice 27.2

Soit $k \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - y = x^k e^x.$$

Exercice 27.4

On considère l'équation différentielle :

$$x y' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 27.6

Soit I un intervalle. Soient $a, b > 0$.

Déterminer l'ensemble des solutions de :

$$\begin{cases} y > 0 \text{ sur } I \\ y' = (a - by)y. \end{cases}$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par $z := \frac{1}{y}$.

Exercices théoriques

Exercice 27.7

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + a f(x) = 0$$

où $a > 0$ est fixé.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet une limite nulle en l'infini.

Exercice 27.8

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π -périodique.

On désigne par g une solution de l'équation différentielle :

$$y' + \alpha y = f.$$

1. Montrer que :

$$g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \iff g(2\pi) = g(0).$$

2. En déduire que l'équation différentielle considérée admet une unique solution 2π -périodique.

Exercice 27.9 Lemme de Gronwall et un exemple d'application.

1. Soient $\psi, y \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K + \int_a^t \psi(s) y(s) ds.$$

Montrer que :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right).$$

2. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ strictement croissante. Montrer que toutes les solutions de

$$y'' + q(t)y = 0$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.