

Colle 26 • INDICATIONS

Applications linéaires

Exercice 26.1

Soit $n \geq 2$. On note $E_n := \mathbb{R}_n[X]$.

On considère :

$$\varphi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow E_n \\ P & \longmapsto (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace E_n .
2. Déterminer le noyau de φ .
3. Déterminer l'image de φ .

indication

1. Il faut vérifier que l'application est correctement définie, i.e. est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Raisonner par analyse-synthèse. Établir qu'un polynôme du noyau admet 1 et -1 comme racines, en utilisant la liberté de la famille (X, X^2) .
3. Raisonner par analyse-synthèse.
Dans la phase de synthèse, pour montrer que $\text{Vect}(X, X^2) \subset \text{Im}(\varphi)$, il suffit de vérifier que $X, X^2 \in \text{Im}(\varphi)$. Pour cela, il faut exhiber deux polynômes P_1 tel que $\varphi(P_1) = X$ et P_2 tel que $\varphi(P_2) = X^2$.

Exercice 26.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit $u \in L(E)$ tel que :

$$u^2 - 6u - 7\text{Id}_E = 0_{L(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u .
2. Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 7\text{Id}_E).$$

indication

1. Déterminer v tel que $u \circ v = v \circ u = \text{Id}_E$ à l'aide de la relation vérifiée par u .
2. Raisonner par analyse-synthèse. En exprimant $x \in E$ comme $x = y + z$ (avec $y \in \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ et $z \in \text{Ker}(u - 7\text{Id}_E)$), écrire $f(x)$ pour en déduire y et z en fonction de x et $f(x)$.

Exercice 26.3

Soit $n \geq 2$. On note $E_n := \mathbb{R}_n[X]$.

On considère :

$$\varphi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow E_n \\ P & \longmapsto (X+2)P(X) - XP(X+1). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace E_n .
2. Déterminer le noyau de φ .

indication

1. Il faut vérifier que l'application est correctement définie, i.e. est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Établir qu'un polynôme du noyau admet 0 et -1 comme racines (en évaluant en -1 et 0).

résultat

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X(X+1)).$$

Exercice 26.4

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les deux sous-espaces :

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.
2. On note p le projecteur sur $\mathcal{P}$, parallèlement à $\mathcal{D}$.
Exprimer, pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $p(u)$.

indication

1. Commencer par écrire que $\mathcal{D} = \text{Vect}\{(1, 2, 3)\}$ et $\mathcal{P} = \text{Vect}\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$.
2. Par définition de p , $p(u) \in \mathcal{P}$ et $u - p(u) \in \mathcal{D}$, donc :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : u - p(u) = \alpha(1, 2, 3).$$

On peut ensuite écrire $p(u)$ et utiliser l'équation de $\mathcal{P}$ pour déterminer la valeur de α .

résultat

$$p(x, y, z) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z).$$

Exercice 26.5

Soit E un espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $g \in L(E)$.

On dit que F est stable par g lorsque :

$$\forall x \in F, \quad g(x) \in F.$$

De manière équivalente, F est stable par g lorsque $g(F) \subset F$.

1. Soient $u, v \in L(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

2. Soit $u \in L(E)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On note $P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k$.

Montrer que $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

indication

1. Écrire avec des quantificateurs ce que signifie $x \in \text{Ker}(u)$ et $y \in \text{Im}(u)$, puis utiliser la relation de commutation.
2. Utiliser la première question en remarquant que $u \circ P(u) = P(u) \circ u$.

Exercice 26.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- (ii) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (iii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

indication

- ♦ (i) $\implies$ (ii) et (ii) $\implies$ (iii) : montrer une inclusion et l'égalité des dimensions par le théorème du rang.
- ♦ (iii) $\implies$ (i) : pour $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ donc $u(x) = u^2(z)$, et écrire :

$$x = x - u(z) + u(z),$$

pour montrer que $E = \text{Ker}(u) + \text{Im}(u)$.

Exercice 26.7

Soit E un espace vectoriel.

Soient $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.

2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.

3. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

indication

1. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \text{Id}_E$.
2. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \text{Id}_E$.
3. Raisonner par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, lorsque l'on écrit $x = y + z$ ($x \in E$, $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(g)$), appliquer f pour déterminer z .
Autre méthode. On peut montrer que $p := g \circ f$ est une projection, utiliser les résultats sur les projections et les questions précédentes.

Exercice 26.8

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$:

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X). \end{cases}$$

1. Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que :

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0.$$

indication

1. Pour le noyau, regarder le coefficient de Δ . Pour l'image, il s'agit de montrer que Δ est surjectif. On peut construire une base de l'image, ou raisonner sur les restrictions aux $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Écrire Δ comme somme de deux endomorphismes qui commutent, en appliquer le binôme de Newton.
3. Évaluer en $X = 0$.

Exercice 26.9

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \text{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0_{\text{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\text{L}(E)}$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
 Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

2. Soit $g \in \text{L}(E)$. Montrer que :

$$g \circ f = f \circ g \iff g \in \text{Vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1}).$$

indication

1. On peut écrire une relation de liaison, raisonner par l'absurde et fixer p tel que $\lambda_p \neq 0$, puis composer par f^{n-1-p} .

2. À x fixé, $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$. Pour prouver que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$, il suffit de prouver que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad g(f^k(x)) = a_0 f^k(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(f^k(x)).$$