

Colle 26

Applications linéaires

- ▶ Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 26.1

Soit $n \geq 2$. On note $E_n := \mathbb{R}_n[X]$.

On considère :

$$\varphi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace E_n .
2. Déterminer le noyau de φ .
3. Déterminer l'image de φ .

Exercice 26.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit $u \in L(E)$ tel que :

$$u^2 - 6u - 7\text{Id}_E = 0_{L(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u .
2. Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 7\text{Id}_E).$$

Exercice 26.3

Soit $n \geq 2$. On note $E_n := \mathbb{R}_n[X]$.

On considère :

$$\varphi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & (X + 2)P(X) - XP(X + 1). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace E_n .
2. Déterminer le noyau de φ .

Exercice 26.4

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les deux sous-espaces :

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.
2. On note p le projecteur sur $\mathcal{P}$, parallèlement à $\mathcal{D}$.
Exprimer, pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $p(u)$.

Exercice 26.5

Soit E un espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $g \in L(E)$.

On dit que F est stable par g lorsque :

$$\forall x \in F, \quad g(x) \in F.$$

De manière équivalente, F est stable par g lorsque $g(F) \subset F$.

1. Soient $u, v \in L(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

2. Soit $u \in L(E)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On note $P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k$.

Montrer que $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

Exercice 26.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in L(E)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- (ii) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (iii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

Exercice 26.7

Soit E un espace vectoriel.

Soient $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

Exercice 26.9

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in L(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ et $f^n = 0_{L(E)}$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

2. Soit $g \in L(E)$. Montrer que :

$$g \circ f = f \circ g \iff g \in \text{Vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1}).$$

Exercice 26.8

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$:

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X). \end{cases}$$

1. Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que :

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0.$$