Jérémy BETTINGER et William GREGORY

Indications

ANALYSE

Exercice 1 **Théorème de Césàro et applications.**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

   (b) Étudier la réciproque.

2. **Lemme de l'escalier.**

   Montrer que

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

3. On suppose désormais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad \ell > 0.$$

   Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Indication • Exercice 1.

1. (a) Revenir à la définition quantifiée de convergence d'une suite, en coupant la somme en deux parties (avant N_ε et après N_ε).

   (b) Prendre comme contre-exemple une suite non convergente très classique.

2. Utiliser **1.(a)** avec la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Regarder ce qu'il se passe pour la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 Transformation d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n := \sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. Principe de la sommation d'Abel.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

2. Démonstration du théorème d'Abel.

On suppose que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n v_n$ converge.

3. Application.

Soient $\alpha > 0$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

(b) En déduire la nature des séries $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

Indication • Exercice 2.

1. Exprimer v_k en fonction de V_k et V_{k-1} et faire un changement d'indice.

2. Utiliser la transformation d'Abel pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles. Vérifier la convergence de chaque terme à l'aide des hypothèses.

3. **(a)** Vérifier les hypothèses du théorème d'Abel avec deux suites judicieusement choisies.

(b) Revenir aux parties réelles et imaginaires.

Exercice 6

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Indication • Exercice 6.

Remarquer que

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) - \Big(\ln(n) - \ln(n-1)\Big)$$

et utiliser les résultats sur les séries télescopiques.

Résultat • Exercice 6.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2).$$

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite positive.

1. Est-ce que, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum_n u_n$ converge ?

2. Montrer que

$$\left.\begin{array}{l}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}\\ \sum_n u_n \text{ converge}\end{array}\right\} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication • Exercice 7.

1. Penser à une série de Bertrand.
2. Majorer nu_n par une différence de sommes partielles, quitte à montrer séparément la convergence vers 0 des suites $\big((2n)u_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((2n+1)u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 20

Existe-t-il $x, y \notin \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$?

Indication • Exercice 20.

On pourra exploiter l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et/ou de $\dfrac{\ln(p)}{\ln(q)}$ avec p et q deux nombres premiers distincts.

Exercice 21

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

Indication • Exercice 21.

Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f et à l'ordre 1 pour f'.

Indications

ALGÈBRE

Exercice 28

Soit $n \geqslant 2$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ayant n racines réelles distinctes.
Soit $a > 0$. Que dire des racines de $P^2 + a$?

Indication • Exercice 28.

- Montrer que les racines de P' sont réelles avec le théorème de Rolle.
- Montrer que $P^2 + a$ et $(P^2 + a)'$ n'ont pas de racines communes.

Résultat • Exercice 28.

Les racines de $P^2 + a$ sont complexes et simples.

Exercice 30

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tels que P' divise P.

Indication • Exercice 30.

Raisonner par analyse-synthèse. Fixer a, λ tels que $P = \lambda(X - a)P'$ et utiliser la formule de Taylor en a pour P puis dériver.

Exercice 36 **Noyaux et images itérés, cœur et nilespace.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k).$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

3. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(u^{p+k}) = \mathrm{Im}(u^p)$$

4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u^p)$ *et* $\mathrm{Ker}(u^p)$ *s'appellent respectivement « cœur » et « nilespace » de* u.

Indication • Exercice 36.

1. Essentiellement, $u^{k+1}(\cdots) = u^k\big(u(\cdots)\big)$.
2. Raisonner avec la suite $\Big(\dim\big(\mathrm{Ker}(u^k)\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$.
3.
   - L'égalité des noyaux peut se démontrer par récurrence.
   - L'égalité des images peut se démontrer à l'aide d'une inclusion et de l'égalité des dimensions, obtenue par le théorème du rang.
4. Utiliser les dimensions et montrer que l'intersection est nulle.

Exercice 40 Matrices de rang 1.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ telles que $A = CL$.
2. Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
3. Déterminer, pour $p \in \mathbb{N}$, une expression de A^p.

Indication • Exercice 40.

1. Les colonnes de A sont liées : il existe C et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{C}_i(A) = \alpha_i C$.
2. On peut utiliser **1.** ou faire un changement de base.
3. Raisonner par récurrence avec **2.**.

Résultat • Exercice 40.

$$A^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \;\; A^p = \mathrm{Tr}(A)^{p-1}A.$$

Exercice 42

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice *nilpotente*.

> *La matrice N est dite* nilpotente *lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.*

Montrer que $N - \mathrm{I}_n$ est inversible et déterminer son inverse.

Indication • Exercice 42.

Calculer $(\mathrm{I}_n - N)\displaystyle\sum_{k=0}^{p_0-1} N^k$ où p_0 désigne l'indice de nilpotence de N (le plus petit entier k tel que $N^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$).

Résultat • Exercice 42.

$$(\mathrm{I}_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k$$

où p_0 désigne l'indice de nilpotence de N.

Exercice 43 **Lemme de Hadamard.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

> *Une matrice* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *est dite* à diagonale strictement dominante *lorsque*
>
> $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Indication • Exercice 43.

Raisonner par contraposée avec le critère nucléaire d'inversibilité : fixer X tel que $AX = 0$ puis étudier une ligne bien choisie de cette équation pour aboutir à une contradiction avec la définition de matrice à diagonale strictement dominante.

Exercice 55 **Inversibilité dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que $M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Indication • Exercice 55.

Raisonner par analyse-synthèse en utilisant

- la description des inversibles de $\mathbb{Z}$;
- la formule de la comatrice.

Résultat • Exercice 55.

Une condition nécessaire et suffisante est que $\left|\det(M)\right| = 1$.

Exercice 59

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & (0) \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & 2 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Indication • Exercice 59.

Reconnaître, à l'aide de développements suivant une ligne ou une colonne, une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déterminer le terme général.

Résultat • Exercice 59.

$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n.$$

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 69 **Similitudes d'un espace euclidien.**

Soient $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{L}(E)$.

- *On dit que f est une* similitude de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *lorsque*

$$\forall x \in E, \quad \big\|f(x)\big\| = \lambda\|x\|.$$

- *On dit que f* préserve l'orthogonalité *lorsque*

$$\forall x, y \in E, \quad x \perp y \implies f(x) \perp f(y).$$

1. Soient $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. Montrer que $x - y \perp x + y$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$f \text{ est une similitude de rapport } \lambda \iff \forall x, y \in E, \ \big\langle f(x) \,\big|\, f(y) \big\rangle = \lambda^2 \langle x \mid y \rangle.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On suppose que f est une similitude de rapport λ.
Montrer que f préserve l'orthogonalité.

4. On suppose que f préserve l'orthogonalité.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

(a) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\big\|f(e_i)\big\| = \big\|f(e_j)\big\|$.

(b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que f est une similitude de rapport λ.

Indication • Exercice 69.

1. Calculer le produit scalaire.
2. $\boxed{\Rightarrow}$ Utiliser la formule de polarisation.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Cas où $x = y$.
3. Utiliser 2..
4. (a) Utiliser 1. avec $f(e_i - e_j)$ et $f(e_i + e_j)$.
   (b) Écrire $x \in E$ dans $(e_i)_i$ puis calculer $\|x\|^2$ et $\left\|f(x)\right\|^2$.

Exercice 75

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \langle A \mid P \rangle$?

Indication • Exercice 75.

Raisonner par l'absurde et considérer la suite $\left((X-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 80 **Suites de carré sommable.**

On considère

$$\ell^2 := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_n |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

On définit sur $\ell^2 \times \ell^2$ l'application suivante :

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\left(\ell^2, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ est un espace préhilbertien réel.
2. On considère

$$F := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant p, \ \ u_n = 0 \right\}.$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2, différent de ℓ^2.
   (b) Montrer que $F \neq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Indication • Exercice 80.

1. Il faut montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puis montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire.
L'inégalité suivante sera utile :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |xy| \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

2. **(a)**

(b) Calculer le produit scalaire entre une suite de $F^\perp$ et $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in F$ pour décrire $F^\perp$ et en déduire $(F^\perp)^\perp$.

Indications

PROBABILITÉS

Exercice 84

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathscr{B}(p_n).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

Indication • Exercice 84.

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 85

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Montrer que

$$\mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2].$$

Indication • Exercice 85.

Utiliser la formule de König-Huygens ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 89

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

2. **Application.**
On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $^1/_6$ d'au plus $^1/_{100}$.

Indication • Exercice 89.

1. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec X et $\varepsilon \leftarrow \varepsilon n$, ou avec $Y := \dfrac{X}{n}$.
2. Bien poser le problème pour appliquer 1..

Résultat • Exercice 89.

$$n \geqslant 27778.$$